МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В. И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №8
по дисциплине «Вычислительная математика»
Тема: Численное дифференцирование

Студент гр. 0304	Крицын Д. Р.
Преподаватель	Попова Е. В.

Санкт-Петербург
2021

Численное дифференцирование применяется тогда, когда функцию трудно или невозможно продифференцировать аналитически. Например, необходимость в численном дифференцировании возникает в том случае, когда функция задана таблицей.

Цель работы: освоить методы численного дифференцирования, изучить погрешность численного дифференцирования.

Основные теоретические положения:

Предположим, что в окрестности точки x функция f дифференцируема достаточное число раз. Исходя из определения производной используем простейшие приближенные формулы:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

Исходя из определения производной, можно предположить, что можно вычислить производную сколь угодно точно, уменьшая Δx.

Положив $\Delta x = h$ и $\Delta x = -h$, получим правую и левую разностные производные.

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \\ f'(x) &\approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \end{aligned} \tag{2}$$

Для оценки их погрешностей

$$\begin{aligned} r_+(x,h) &= f'(x) - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \\ r_-(x,h) &= f'(x) - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}. \end{aligned} \tag{3}$$

используя формулу Тейлора, можно получить выражения (4).

$$\begin{aligned} |r_+(x,h)| &\le \frac{1}{2} M_1 h, M_1 = \max_{[x,x+h]} |f''(\xi)|, \\ |r_-(x,h)| &\le \frac{1}{2} M_2 h, M_2 = \max_{[x-h,x]} |f''(\xi)|. \end{aligned} \tag{4}$$

Формулы (2) имеют первый порядок точности. Центральная разностная производная, получающаяся путём сложения двух других разностных производных и деления числителя и знаменателя на 2.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \tag{5}$$

имеет второй порядок точности (6).

$$|r_0(x,h)| \le \frac{1}{6} M_3 h^2, M_3 = \max_{[x-h,x+h]} |f^{(3)}(\xi)|. \tag{6}$$

При вычислении второй производной используют формулу второй разностной производной:

$$f''(x) \approx \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2}. \quad (7)$$

Погрешность этой формулы имеет второй порядок точности:

$$|r(x,h)| \le \frac{M_4}{12} h^2, M_4 = \max_{[x-h,\, x+h]} |f^{(4)}(\xi)|. \quad (8)$$

Если функция задана на сетке, она может аппроксимироваться кубическим сплайном.

На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн определяется формулой

$$s(x) = f_i (1-t)^2 (1+2t) + f_{i+1} t^2 (3-2t) + m_i h_i t (1-t)^2 - m_{i+1} t^2 (1-t) h_i,$$

где $f_i = f(x_i), t = \dfrac{x - x_i}{h_i}, h_i = x_{i+1} - x_i,$ а m_i — коэффифиценты сплайна.

Тогда для всех $x \in [x_i, x_{i+1}]$ за численное значение производных $f'(x)$ и $f''(x)$ принимают значения точных производных сплайна:

$$f'(x) \approx s'(x) = [-6 f_i t(1-t) + 6 f_{i+1} t(1-t) + m_i h_i (1-t)(1-3t) + m_{i+1} h_i t(3t-2)] / h_i;$$

$$f''(x) \approx s''(x) = 6(f_i - f_{i-1})(2t-1)/h_i^2 + 2[m_i(3t-2) + m_{i+1}(3t-1)].$$

Коэффициенты сплайна равны производной функции $m_i = f'(x_i)$ в соответствующих точках.

Погрешность сплайна не превосходит

$$\max_{[a,b]} |f(x) - S_3(x)| \le \frac{M_4}{384} h_{max}^4 \quad ,$$

где

$h_{max} = \max_{1 \le i \le n} h_i$ — максимальная из длин частотных отрезков.

Справедливы также неравенства

$$\max_{[a,b]} |f^{(k)}(x) - S_3^{(k)}(x)| \le C_k M_4 h_{max}^{4-k}.$$

Обусловленность формул численного дифференцирования

Полная погрешность вычисления производной равна сумме погрешности аппроксимации и неустранимой погрешности. Пусть $\bar{\Delta}$ – верхняя граница абсолютной погрешности $\Delta\left(f^*(x)\right) = \left|f(x) - f^*(x)\right|$, тогда

$$|r_н| \le \frac{2\bar{\Delta}}{h}. \quad (9)$$

Чувствительность формулы (1) к погрешностям входных данных характеризуется абсолютным числом обусловленности $\nu_{\Delta}=\frac{2}{h}$. Верхняя граница полной погрешности равна (10)

$$\bar{r}(h)=1/2\,M_2 h+\frac{2\bar{\Delta}}{h}. \qquad (10)$$

Вычисляя экстремальное значение, получаем $h_{опт}=2\sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{M_2}}$ и $\bar{r}_{min}=\bar{r}\,h_{опт}=2\sqrt{\bar{\Delta}M_2}.$

Порядок выполнения работы.

1 Сосчитать логарифмическую производную первого и второго порядка для данной функции. Сформировать 6 узлов из области определения функции.

2 Используя формулу (1), и положив $\Delta x=h,$ определить значение h, при котором численное значение производной становится неприемлемым.

3 Вычислить разностные производные (2)-(8), их погрешности, точные значения производных и их абсолютные погрешности, сравнить.

4 Построить кубический сплайн по точкам $[x_i;x_{i+1}]$. Сосчитать производную первого и второго порядка в точке, не являющейся узловым значением. Сравнить с точными вычислениями. Получить значения производных сплайна для разных h.

5 Ответить на вопросы:

5.a. При каких значениях h все 3 способа (точный, с разностными формулами, с помощью сплайна) дают практически одинаковые значения?

5.b. При каком h разностные формулы не дают ни одного верного знака?

6 Подсчитать абсолютный коэффициент обусловленности при подстановке оптимального $h_{опт}$ при использовании формулы (1).

7 Сделать выводы по полученным значениям.

Выполнение работы.

1. Вариант 24:

$$f(x)=x^{\left(x^{\frac{1}{3}}-x^2\right)}.$$

Область определения: $x\in[0;\infty)$. Положим узлы функции равными:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1

Производные функции:

$$(\ln y)'=(\ln(x^{(x^{\frac{1}{3}}-x^2)}))'$$

$$\frac{1}{y}y'=((x^{\frac{1}{3}}-x^2)\ln x)'$$

$$\frac{1}{y}y'=(\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}-2x)\ln x+\frac{(x^{\frac{1}{3}}-x^2)}{x}$$

$$y'=((\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-2x)\ln x+x^{-\frac{2}{3}}-x)x^{(x^{\frac{1}{3}}-x^2)}-\textit{первая производная } f(x).$$

$$y''=(y')'=((-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}-2)\ln x+\frac{(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-2x)}{x}-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}-1)x^{(x^{\frac{1}{3}}-x^2)}+$$

$$+((\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-2x)\ln x+x^{-\frac{2}{3}}-x)^2x^{(x^{\frac{1}{3}}-x^2)}-\textit{вторая производная } f(x).$$

2. С использованием формулы левой разностной производной и созданной программы было определено значение *h*, при котором вычисленная приблизительно производная функции не имеет ни одной верной цифры (результаты приведены на Рисунке 1).

```
Поиск неприемлимого (без верных цифр) значения h:
h = 0.241;
В точке x = 1.7: f'(x) = -1.08852, f'*(x) = -0.906563 (Δf'*(x) = -0.181955)
```

Риуснок 1 — результаты поиска неприемлимого значения h

Теперь оценим точность вычисления производной функции при различных значениях h, $10^{-16} \le h \le 1$:

Точность вычисления производной при различных значениях h:

h	f'(x)	f'*(x)	Δf'*(x)	Верных цифр
1	-1.08852	-0.403623	0.684896	0
0.1	-1.08852	-1.02083	0.0676886	17
0.01	-1.08852	-1.08248	0.0060348	17
0.001	-1.08852	-1.08792	0.000595132	17
0.0001	-1.08852	-1.08846	5.94287e-05	17
1e-05	-1.08852	-1.08851	5.94201e-06	16
1e-06	-1.08852	-1.08852	5.9423e-07	17
1e-07	-1.08852	-1.08852	5.77148e-08	17
1e-08	-1.08852	-1.08852	2.75874e-09	17
1e-09	-1.08852	-1.08852	1.19366e-07	17
1e-10	-1.08852	-1.08852	3.96922e-07	17
1e-11	-1.08852	-1.08853	1.0944e-05	17
1e-12	-1.08852	-1.08863	0.000110864	17
1e-13	-1.08852	-1.08802	0.000499759	17
1e-14	-1.08852	-1.09912	0.0106025	17
1e-15	-1.08852	-1.27676	0.188238	16
1e-16	-1.08852	0	1.08852	0

Риуснок 2 — точность вычисления правой разностной производной при разных h

Видно, что около $h \approx 10^{-8}$ погрешность вычисления правой разностной производной $\Delta f^{*\prime}(x) \approx 2{,}75874 \cdot 10^{-9}$ достигает своего наименьшего значения, а затем, при дальнейшем уменьшении h (и, соответственно, приближении к машинному эпсилон) погрешность снова начианет возрастать, и в конце концов при преодолении машинного эпсилон (на данном компьютере оно равно $\varepsilon_{маш} = 2{,}2045 \cdot 10^{-16}$) вычисленная производная функции не имеет ни одного верного знака, и становится неприемлимой.

Можно сделать вывод, что при слишком большом значении h ($h \geq 1$) или при значении h, слишком малым и поэтому близком к машинному эпсилон ($h < 10^{-15}$) погрешность вычисления производной становится настолько большой, что нельзя выделить ни одной верной цифры из производной.

3. Возьмём точку вне выделенных узлов $x = 1{,}7$ и вычислим в ней точные и приближённые разностными производными производные первого и второго порядка, а также погрешности их вычислений. Помимо этого возьмём две узловые точки: $x = 1{,}5, x = 2{,}1$. Результаты вычислений предоставлены на Рисунке 3.

```
Разностные производные при h = 0.01, x = 1.7:

Тип производной |f*'(x)    |Δf'*(x)
f'(x)           |-1.08852  |0
левая разностн. |-1.09437  |0.00584684
правая разностн.|-1.08248  |0.0060348
центральная раз.|-1.08842  |9.39791e-05
----------------------------------------
f''(x)          |1.18839   |0
разн. 2-го пор. |1.18816   |0.000221664

Разностные производные при h = 0.01, x = 1.5:

Тип производной |f*'(x)    |Δf'*(x)
f'(x)           |-1.18186  |0
левая разностн. |-1.17978  |0.00208583
правая разностн.|-1.18363  |0.00176974
центральная раз.|-1.1817   |0.000158045
----------------------------------------
f''(x)          |-0.385489 |0
разн. 2-го пор. |-0.385558 |6.92239e-05

Разностные производные при h = 0.01, x = 2.1:

Тип производной |f*'(x)    |Δf'*(x)
f'(x)           |-0.437058 |0
левая разностн. |-0.444569 |0.00751103
правая разностн.|-0.429637 |0.00742128
центральная раз.|-0.437103 |4.4872e-05
----------------------------------------
f''(x)          |1.49329   |0
разн. 2-го пор. |1.49323   |6.30291e-05
```

Риуснок 3 — точные и разностные производные 1-го и 2-го порядков при h = 0,01, x = 1,7

По данным результатам вычислений (суммарно во всех трёх точках) можно сделать следующие выводы:

Левая и правая разностные производные дали примерно одинаковые результаты (погрешность отличается не более чем на 0,0002). Однако, погрешность центральной разностной производной составила примерно $9{,}39791 \cdot 10^{-5}$ для первого случая — на 2 порядка меньше (это наблюдение верно и для *x = 2,1*; для *x = 1,5* разность уменьшается до 1 порядка, но всё равно существенна). Кроме того, погрешность вычисления разностной производной второго порядка на порядок меньше (как минимум; в табличных точках *x = 1,5* и *x = 2,1* различие увеличивается до 2 порядков), чем таковые левые и правые погрешности первого порядка. Это происходит потому, что погрешности правой и левой разностных производных линейно зависят от h (первый порядок малости), а погрешности центральной разностной и второй производной линейно зависят от h^2 (второй порядок малости), при том что $h \le 1$ (соответственно, чем меньше h, тем меньше погрешность, и порядок убывания влияет на скорость убывания такой погрешности).

4. Построим кубический сплайн по выбранным в пункте 1 узлам интерполяции. Вычислим производные сплайна 1-го и 2-го порядка в точке $x = 1{,}7$ на образованных узлами отрезках $[x_i, x_{i+1}]$:

```
Производные сплайна 1-го и 2-го порядков при h = 0.01, x = 1.7:

Тип производной |f*'(x)    |Δf'*(x)
f'(x)           |-1.08852  |0
s'(x)           |-1.09231  |0.00378773
---------------------------------------
f''(x)          |1.18839   |0
s''(x)          |1.12454   |0.0638415
```

Риусною 4 — производные сплайна 1-го и 2-го порядков

Видно, что первая производная сплайна вычисляется на порядок более точно по сравнению со второй производной.

Также вычислим разностные производные 1-го и 2-го порядков для кубического сплайна в той же точке и при том же значении h:

```
Разностные производные сплайна при h = 0.01, x = 1.7:

Тип производной |f*'(x)    |Δf'*(x)
f'(x)           |-1.08852  |0
левая р-я s'(x) |-1.09782  |0.00929766
правая р-я s'(x)|-1.08657  |0.00194778
центр. р-я s'(x)|-1.09219  |0.00367494
----------------------------------------
f''(x)          |1.18839   |0
разн. 2п. s'(x) |1.12454   |0.0638415
```

Рисунок 5 — разностные производные сплайна 1-го и 2-го порядков

Видно, что погрешности левой, правой и центральной разностных производных не различаются более чем на порядок, хотя все они больше, чем любая погрешность разностной производной для точной функции. В особенности данный факт заметен на примере погрешности центральной разностной производной.

Тот же факт верен и для разностной производной второго порядка, которая на 2 порядка больше соответствующей погрешности разностной производной второго порядка, но для точной функции.

Теперь сравним все производные второго порядка для сплайна. Результаты вычислений приведены на Рисунке 6.

```
Производные сплайна второго порядка при h = 0.01, x = 1.7:

Тип производной |f*'(x)    |Δf'*(x)
f''(x)          |1.18839   |0
s''(x)          |1.12454   |0.0638415
разн. 2п. s'(x) |1.12454   |0.0638415
```

Рисунок 6 — производные сплайна второго порядка

Как видно, значения производной сплайна и разностной производной сплайна совпали. Видимо, это произошло из-за того, что шаг h заметно меньше фиксированной разницы между двумя узлами сплайна. Отсюда дифференциалы dx и dy настолько невелики, что в некоторых точках, вроде $x = 1,7$, сплайн и функция совпадают с весьма большой точностью, и производные, соответственно, тоже совпадают.

Проведём исследование зависимости погрешности правой разностной производной сплайна от величины h. Будем варьировать значение h в пределах $10^{-16} \le h \le 1$. Результаты исследований приведены на Рисунке 7.

```
Точность вычисления производной сплайна при различных значениях h:
h          |f'(x)      |s'(x)      |Δf'*(x)        |Верных цифр
1          |-1.08852   |0.597917   |1.68643        |0
0.1        |-1.08852   |-1.0248    |0.063719       |16
0.01       |-1.08852   |-1.08657   |0.00194778     |17
0.001      |-1.08852   |-1.09174   |0.00322433     |17
0.0001     |-1.08852   |-1.09225   |0.0037315      |16
1e-05      |-1.08852   |-1.0923    |0.00378211     |17
1e-06      |-1.08852   |-1.09231   |0.00378717     |17
1e-07      |-1.08852   |-1.09231   |0.00378768     |17
1e-08      |-1.08852   |-1.09231   |0.00378772     |17
1e-09      |-1.08852   |-1.09231   |0.00378781     |17
1e-10      |-1.08852   |-1.09231   |0.00378792     |17
1e-11      |-1.08852   |-1.0923    |0.0037857      |17
1e-12      |-1.08852   |-1.0924    |0.00388562     |16
1e-13      |-1.08852   |-1.09079   |0.0022758      |17
1e-14      |-1.08852   |-1.09357   |0.00505136     |17
1e-15      |-1.08852   |-1.27676   |0.188238       |16
1e-16      |-1.08852   |0          |1.08852        |0
```

Риуснок 7 — точность вычисления правой разностной производной сплайна в зависимости от h

Видно, что с уменьшением h вплоть до $h \approx 10^{-13}$ погрешность вычисления правой разностной производной сплайна уменьшается, но при дальнейшем уменьшении h она начинает увеличиваться, и после достижения машинного эпсилон погрешность становится настолько большой, что становится невозможным выделить хотя бы одну верную цифру.

Данные закономерности (для данного пункта и для пункта 2) объясняются формулой погрешности метода численного дифференцирования:

$$\bar{r} = \frac{1}{2} M_2 h + \frac{2\bar{\Delta}}{h}$$

При уменьшении h первое слагаемое (погрешность метода) сначала уменьшается куда быстрее, чем второе слагаемое (неустранимая погрешность), но в зависимости от параметров M_2 и $\bar{\Delta}$ после достижения некоторого значения увеличение второго слагаемого «перевешивает» уменьшение первого. Таким образом, значение $h \approx 10^{-13}$ можно приблизительно взять за оптимальное, хотя точное оптимальное значение можно высчитать и по формуле $h_{опт} = 2\sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{M_2}}$.

5. При $h \approx 10^{-15}$ и менее точный, разностный методы и метод кубического сплайна дают примерно одинаковый результат (погрешности примерно совпадают). При этом при $h \leq 10^{-16}$ разностные формулы не дают ни одной верной цифры.

6. Вычислим при помощи программы абсолютное число обусловленности, сначала найдя значение *h*, после которого погрешность вычисления правой разностной производной сплайна начинает возрастать. Результаты вычислений приведены на Рисунке 8.

```
Число h, после которого начинается возрастание погрешности: 0.01
Абсолютное число обусловленности: ν Δ = 2 / h = 200
```

Риуснок 8 — вычисление значения h, дающего минимальную погрешность вычисления разностной производной кубического сплайна, и соответствующее вычисление абсолютного числа обусловленности

Число обусловленности довольно велико, и с уменьшением *h* оно, очевидно, возрастает. Можно сделать вывод, что задача численного дифференцирования плохо обусловлена.

Вывод.

Были освоены различные методы численного дифференцирования и была изучена погрешность этих методом в зависимости от различных параметров.

Было определено, что при дифференцировании приближённой (узловой) функции точность разностных производных увеличивается с уменьшением шага h, но лишь до какого-то значения, ниже которого погрешность снова начинает возрастать. Такое значение называется оптимальным ($h_{опт}$).

Полная погрешность вычисления разностной производной является суммой погрешности метода и неустранимой погрешности ($\bar{r}=\frac{1}{2}M_2 h+\frac{2\bar{\Delta}}{h}$), и поэтому данный предел существует.

Кроме того, с уменьшением *h* абсолютное число обусловленности возрастает, поэтому задачу численного дифференцирования можно назвать некорректной.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

```
#include <float.h>
#include <math.h>
#include <stdio.h>

// Подсчёт верных цифр в числе
unsigned count_right_digits(double num, double incorr)
{
	num = fabs(num);

	incorr *= 10;
	num /= incorr; num = round(num); num *= incorr;
	while(floor(num) < num)
		num *= 10;

	long long inum = (long long)round(num);
	unsigned rdigs = 0;
	while(inum > 0)
	{ rdigs++; inum /= 10; }

	return rdigs;
}

// Разностные производные
double right_sub_deriv(double (*f)(double), double h, double x) { return (f(x +
h) - f(x)) / h; }
double left_sub_deriv(double (*f)(double), double h, double x) { return (f(x) -
f(x - h)) / h; }
double center_sub_deriv(double (*f)(double), double h, double x) { return (f(x +
h) - f(x - h)) / (2*h); }

// Разностная производная второго порядка
double sub_deriv2(double (*f)(double), double h, double x) { return (f(x - h) -
2*f(x) + f(x + h)) / pow(h, 2); }



// Кубический сплайн
double spline(double (*f)(double), double (*f_deriv)(double), double x_i, double
x_i1, double x)
{
```

```
	double f_i = f(x_i), f_i1 = f(x_i1);
	double h_i = x_i1 - x_i;
	double t = (x - x_i) / h_i;
	double m_i = f_deriv(x_i), m_i1 = f_deriv(x_i1);
	return f_i * pow((1 - t), 2) * (1 + 2*t) + f_i1 * pow(t, 2) * (3 - 2*t)
		+ m_i * h_i * t * pow((1 - t), 2) - m_i1 * pow(t, 2) * (1 - t) *
h_i;
}
double spline_deriv1(double (*f)(double), double (*f_deriv)(double), double x_i,
double x_i1, double x)
{
	double f_i = f(x_i), f_i1 = f(x_i1);
	double h_i = x_i1 - x_i;
	double t = (x - x_i) / h_i;
	double m_i = f_deriv(x_i), m_i1 = f_deriv(x_i1);
	return (  -6 * f_i * t * (1 - t) + 6 * f_i1 * t * (1 - t)
		+ m_i * h_i * (1 - t) * (1 - 3*t) + m_i1 * h_i * t * (3*t - 2) ) /
h_i;
}
double spline_deriv2(double (*f)(double), double (*f_deriv)(double), double x_i,
double x_i1, double x)
{
	double f_i = f(x_i), f_i1 = f(x_i1);
	double h_i = x_i1 - x_i;
	double t = (x - x_i) / (x_i1 - x_i);
	double m_i = f_deriv(x_i), m_i1 = f_deriv(x_i1);
	return 6*(f_i - f_i1) * (2*t - 1) / pow(h_i, 2) + 2*(m_i*(3*t - 2) +
m_i1*(3*t - 1)) / h_i;
}



// Начальная функция, её производные и узлы:
double points_x[] = {0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1};
double f(double x)
{ return pow(x, (pow(x, 1./3) - pow(x,2))); }
double f_deriv(double x)
{ return (((1./3)*pow(x, -2./3) - 2*x)*log(x) + pow(x, -2./3) - x)
* pow(x, (pow(x, 1./3) - pow(x,2))); }
double f_deriv2(double x)
{ return ( ((-2./9)*pow(x, -5./3) - 2)*log(x) + ((1./3)*pow(x,-2./3) - 2*x) / x
- (2./3)*pow(x,-5./3)
- 1 ) * pow(x, (pow(x, 1./3) - pow(x,2)))
```

```
+ pow(( ((1./3)*pow(x,-2./3) - 2*x)*log(x) + pow(x, -2./3) - x ), 2) * pow(x,
(pow(x, 1./3) - pow(x,2))); }

// Готовая функция сплайна от одного аргумента, для передачи в sub_deriv(...)
double spline_func(double x)
{
	return spline(&f, &f_deriv, points_x[3], points_x[4], x);
}




void put_line(size_t length)
{
	for(size_t i = 0; i < length; ++i) putchar('-'); puts("");
}

int main()
{
	printf("Поиск неприемлимого (без верных цифр) значения h:\n");
	double x = 1.7; double h; for(h = 0.001; ; h += 0.001)
	{
		double res = right_sub_deriv(&f, h, x);
		double inacc = fabs(f_deriv(x) - right_sub_deriv(&f, h, x));
		if(count_right_digits(res, inacc) == 0)
			break;
	}
	printf("h = %lg;\n", h);
	printf("В точке x = %lg: f'(x) = %lg, f'*(x) = %lg (Δf'*(x) = %lg)\n", x,
f_deriv(x), right_sub_deriv(&f, h, x), f_deriv(x) - right_sub_deriv(&f, h, x));

	printf("\nТочность вычисления производной при различных значениях h:\n");
	printf("%-10s|%-16s|%-20s\n", "h", "Δf'*(x)", "Верных цифр");
	for(h = 1.0; h >= DBL_EPSILON / 4; h /= 10)
	{
		double res = right_sub_deriv(&f, h, x);
		double inacc = fabs(f_deriv(x) - right_sub_deriv(&f, h, x));
		printf("%-10lg|%-15lg|%-20u\n", h, inacc, count_right_digits(res,
inacc));
	}

	h = 0.01;
	printf("\nРазностные производные при h = %lg, x = %lg:\n\n", h, x);
	printf("%-30s|%-10s|%-10s\n", "Тип производной", "f*'(x)", "Δf'*(x)");
```

```
	{
		double res, inacc;

		res = f_deriv(x);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "f'(x)", res, 0.);
		res = left_sub_deriv(&f, h, x);
		inacc = fabs(f_deriv(x) - res);
		printf("%-29s|%-10lg|%-10lg\n", "левая разностн.", res, inacc);
		res = right_sub_deriv(&f, h, x);
		inacc = fabs(f_deriv(x) - res);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "правая разностн.", res, inacc);
		res = center_sub_deriv(&f, h, x);
		inacc = fabs(f_deriv(x) - res);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "центральная раз.", res, inacc);

		put_line(40);

		res = f_deriv2(x);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "f''(x)", res, 0.);
		res = sub_deriv2(&f, h, x);
		inacc = fabs(f_deriv2(x) - res);
		printf("%-25s|%-10lg|%-10lg\n", "разн. 2-го пор.", res, inacc);
	}

	printf("\nПроизводные сплайна 1-го и 2-го порядков при h = %lg, x = %lg:\
n\n", h, x);
	printf("%-30s|%-10s|%-10s\n", "Тип производной", "f*'(x)", "Δf'*(x)");
	{
		double res, inacc;

		res = f_deriv(x);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "f'(x)", res, 0.);
		res = spline_deriv1(&f, &f_deriv, points_x[3], points_x[4], x);
		inacc = fabs(f_deriv(x) - res);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "s'(x)", res, inacc);

		put_line(40);

		res = f_deriv2(x);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "f''(x)", res, 0.);
		res = spline_deriv2(&f, &f_deriv, points_x[3], points_x[4], x);
		inacc = fabs(f_deriv2(x) - res);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "s''(x)", res, inacc);
```

```
	}

	printf("\nРазностные производные сплайна при h = %lg, x = %lg:\n\n", h, x);
	printf("%-30s|%-10s|%-10s\n", "Тип производной", "f*'(x)", "Δf'*(x)");
	{
		double res, inacc;

		res = f_deriv(x);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "f'(x)", res, 0.);
		res = left_sub_deriv(&spline_func, h, x);
		inacc = fabs(f_deriv(x) - res);
		printf("%-23s|%-10lg|%-10lg\n", "левая р-я s'(x)", res, inacc);
		res = right_sub_deriv(&spline_func, h, x);
		inacc = fabs(f_deriv(x) - res);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "правая р-я s'(x)", res, inacc);
		res = center_sub_deriv(&spline_func, h, x);
		inacc = fabs(f_deriv(x) - res);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "центр. р-я s'(x)", res, inacc);

		put_line(40);

		res = f_deriv2(x);
		printf("%-16s|%-10lg|%-10lg\n", "f''(x)", res, 0.);
		res = sub_deriv2(&spline_func, h, x);
		inacc = fabs(f_deriv2(x) - res);
		printf("%-21s|%-10lg|%-10lg\n", "разн. 2п. s'(x)", res, inacc);
	}

	printf("\nТочность вычисления производной сплайна при различных значениях h:\n");
	printf("%-10s|%-16s|%-20s\n", "h", "Δf'*(x)", "Верных цифр");
	double h_opt_in_table = -INFINITY, inacc_opt_in_table = INFINITY;
	for(h = 1.0; h >= DBL_EPSILON / 4; h /= 10)
	{
		double res = right_sub_deriv(&spline_func, h, x);
		double inacc = fabs(f_deriv(x) - right_sub_deriv(&spline_func, h, x));
		printf("%-10lg|%-15lg|%-20u\n", h, inacc, count_right_digits(res, inacc));
		if(inacc < inacc_opt_in_table)
		{ inacc_opt_in_table = inacc; h_opt_in_table = h; }
	}
```

```
    printf("\nЧисло h, после которого начинается возрастание погрешности: %lg\
n", h_opt_in_table);

    printf("Абсолютное число обусловленности: v_Δ = 2 / h = %lg\n", 2 /
h_opt_in_table);
}
```