Доказательства к устному экзамену.

$\boxed{\forall\, 1 \leq i, j \leq K: M_i \cap M_j = \varnothing \text{ или } M_i = M_j}$

док-во от противного:

$\exists\, i, j: M_i \cap M_j \neq \varnothing$:

тогда $\exists_n: m_n \in M_i, m_n \in M_j$, но из-за свойства транзитивности

$$\forall m_i \in M_i, m_j \in M_j, \begin{cases} f(m_i, m_n) = 1, f(m_n, m_j) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(m_i, m_j) = 1.$$

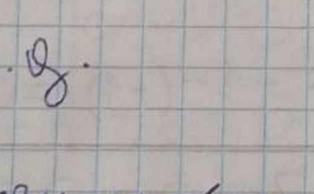
т.о. $M_i = M_j$, т.к. $\forall\, m_i, m_j\ f(m_i, m_j) = 1$.

ч.т.д.

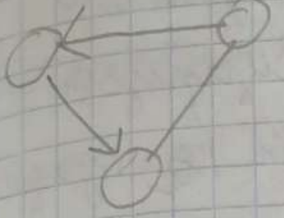
Корректность TopSort

Рассмотрим случай, когда алгоритм может быть некорректен, т.е. на каком-то шаге $\nexists$ min элемента.

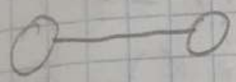
Это может произойти в цикле длины 3 и более:



Однако для б.о. частичного порядка должно соблюдаться св-во транзитивности, и одно ребро должно быть двунаправленным:



Но по свойству антисимм. такие вершины (объединённые двунапр. ребром) должны совпадать:



и далее:

т.о. циклов в б.о. част. пор. не существует, и алгоритм TopSort всегда корректен.

ч.т.д.

Сложность алг. построения транз. замыкания через возведение матр. смежности в степень:

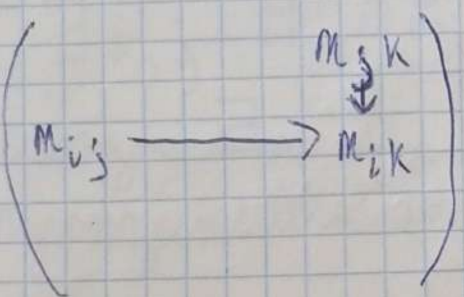
Умножение строки на столбец — $O(n^2)$.

В каждой матрице n строк — сложность умножения матриц — $O(n^3)$.

Общая сложность $(n-2)$ умножений матриц — $O(n^3(n-2)) \sim O(n^4)$.

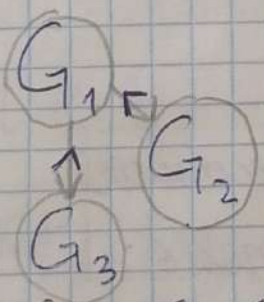
Корректность алгоритма Флойда-Уоршелла

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$



На каждом шаге алгоритм Флойда-Уоршелла продуцирует $m_{ij} \cdot m_{jk}$ на m_{ik}. Если на предыдущем шаге пути $i \to \dots \to k$ не существовало, но $m_{ij} \cdot m_{jk} = 1$ (i смежно с j, j смежно с K), то путь из i в K существует и проходит через j.

Корректность алгоритма поиска мостов



$L = \{G_1, G_2, G_3\}$

После 1-го поиска в глубину, который обходит все вершины в графе (а значит и все мосты), мосты будут направлены противоположно направлению обхода, а значит, повторный проход по ним в таком же порядке (стека L) будет невозможен, что приведёт к перезапуску поиска в глубину с выделением мостов.

Если существует дуга e: $G_1 \xrightarrow{e} G_2$, то после I шага алг. Косарайю $v \in V$ с макс. номером $\in G_1$.

$G_1 \xrightarrow{e} G_2$ Пусть v_0 - нач. вершина, т.ч. $\exists$ путь $v_0 \to G_2$;

max#

1. $v_0 \in G_1$:

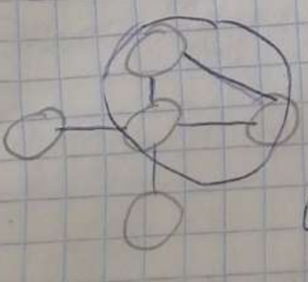
Алгоритм поиска в глубину присваивает номер вершине, когда нельзя найти смежных с ней непосещённых вершин; т.е. после посещения $\forall v_2 \in G_2$, т.ч. $\exists$ путь $v_0 \to v_2$, алгоритм откатится к v_0, и $\#v_0 > \forall \#v_2$. Если остались непосещённые вершины в G_2, то пункт 1 можно повторить.

2. $v_0 \in G_2$:

т.к. мост направлен из G_1 в G_2, то после посещения $\forall v_2 \in G_2$ алгоритм перезапустится в G_1, и $\forall v_1 \in G_1, \forall v_2 \in G_2$ $\#v_1 > \#v_2$.

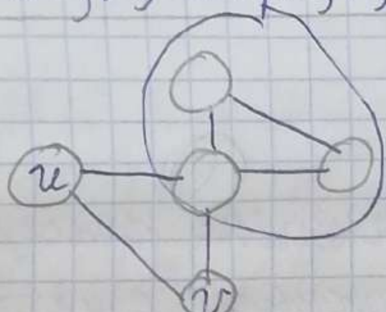
ч.т.д.

$G(V,E)$ - неор.; $u, v \in V$, $\exists$ путь $u \to v$ $\Rightarrow$ $\exists$ цепь $u \to v$



Путь в неор. графе можно превратить в цепь, исключая $\forall e \in$ неор. циклам, $\forall v \in$ неор. циклам, кроме начальных, которые встречаются дважды; $\forall v \in V$ путь $u \to v$ после исключения повторений станет цепью. ч.т.д.

G(V, E) - неор.; u, v ∈ замкн. прост. пути ⇒ ∃ цикл ∋ u, v

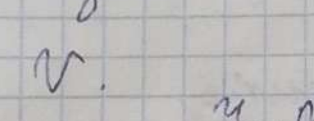


Замкнутый простой путь в неор. графе можно превратить в цикл, исключив повторений вершин:

для этого нужно исключить ∀e ∈ циклам, ∀v ∈ циклам (кроме начальных), не исключая 1 цикл ∋ u, v, который может повторять лишь u или v.

ч.т.д.

граф Герца от G ($\tilde{G}(G)$) ∌ ориент. циклов.

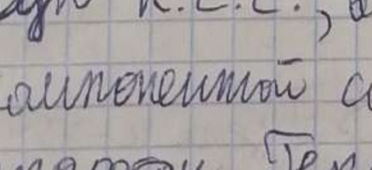


док-во от противного: положим, что $\tilde{G}(G)$ содержит ориент. циклы $G_1, G_2 \ldots G_k$;

тогда к.с.с. $G_1, G_2, \ldots, G_k$ имеют пути в любую другую к.с.с., а значит, в свою очередь являются одной компонентой сильной связности, а $\tilde{G}(G)$ не является графом Герца.

ч.т.д.

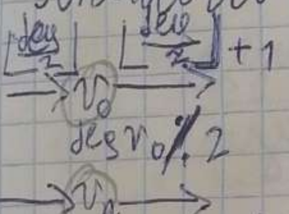
док-во критерия эйлеровости.



При ∀v∈V deg(v):2 рёбра каждой вершины можно разбить на 2 непересекающихся множества. Это

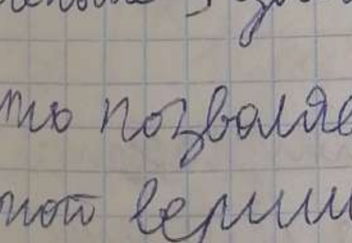
значит, что в каждую вершину можно войти и выйти одинаковое кол-во раз, при этом посетив все инцидентные $e \in E$ ровно 1 раз; это делает построение эйл. цикла через v возможным.
Утверждение верно для $\forall v \in V$ - критерий корректен. ч.т.д.

док-во критерия полуэйлеровости.



Аналогично предыдущему док-ву, но для начальной вершины мн-во исходящих рёбер на 1 больше, что позволяет вернуться в вершину на 1 раз меньше; для конечной входящих рёбер на 1 больше, что позволяет закончить эйлеров путь в этой вершине.

док-во корректности алгоритма Флёри



Немодифицированный поиск в глубину так или иначе проходит любое $e \in E$ ровно 1 раз, т.к. вершины, которым инцидентно e, уже добавлены в

список уже пройденных вершин.
Однако поиск в глубину может потребовать перезапуска, если при переходе по мосту уже нельзя вернуться в непосещённые вершины, что не создаёт связного Эйлерова пути/цикла; при посещении мостов в последнюю очередь компонента связности, образующаяся при переходе по мосту и отсечении посещённого ребра, будет уже полностью посещена и не будет требовать перезапуска поиска в глубину. ч.т.д.

(док-во корректности алг. на списках смеж.)

Алгоритм рассматривает рёбра по списку инцидентности, т.о. проходя все $e \in E$, причём ровно 1 раз.
Корректность Эйлерова путь/цикл получается за счёт построения порядка обхода вершин наоборот (через стек): т.е. тупиковые вершины оказываются последними в пути/цикле, завершая его.
(иначе говоря, вместо перезапуска поиска в глубину происходит добавление тупиковых

вершины не в начало, а в конец пути, что будет в итоге следовать после посещения цикла, приведшего в такие вершины).

ч.т.д.

Графы де Брюйна - Эйлеровы.

Исходя из определения $|V| = |T^k| = n^k$, где n - мощность алфавита.

Ребро, соединяющее две вершины, содержит 1-ую букву v_1 и посл. букву v_2, а также их перекрывающуюся часть длиной $(K-1)$, что соответствует слову длиной $(K+1)$.

Таких слов существует $|T^{K+1}| = n^{K+1} = |E|$.

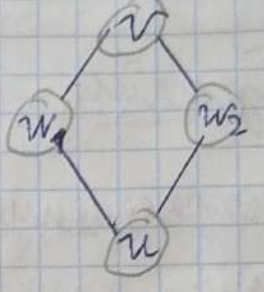
Кроме того, кол-во раз, которое каждое слово из T^k встречается в T^{K+1}, равно $2n$ (n раз как ~~суффикс~~ префикс $\boxed{x_1 \dots x_k} v_0$, различных v_0 - n штук; аналогично n раз как суффикс $v_0 \boxed{x_1 \dots x_k}$); т.о. $deg(v) \vdots 2$ для $\forall x \in V$.

ч.т.д.

Теорема Оре. $\forall u, v \in V$, т.ч. u, v — не смежные $\deg u + \deg v \geq |V| \Rightarrow G(V,E)$ — гамильтонов.

Положим, что $G(V,E)$ — гамильтонов. Тогда для $\forall u, v \in V$, u, v — несмежные $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists w_1, w_2 \in V$:



$\exists e_1 = \overline{uw_1}, e_2 = \overline{uw_2},$

$e_3 = \overline{vw_1}, e_4 = \overline{vw_2};$

(Иначе говоря, в гам. графе несмежные вершины принадлежат циклу как минимум длины 4; без цикла нельзя будет построить гам. цикл, с циклом длины 3 $\exists e = \overline{uv}$.)

Рассмотрим случай, когда v смежно со всеми остальными $v \in V \setminus \{u\}$, а u нет:

$\deg u + \deg v = 2 + (|V| - 2) \geq |V|$.

~~Аналогично~~

Если u смежно с $K \geq 2$ вершинами:

$\deg u + \deg v = K + (|V| - K) \geq |V|$.

Если существуют вершины, смежные и с u, и с v, то они лишь увеличивают $\deg u + \deg v$, которая в минимальном случае равна $|V|$.

ч.т.д.

Теорема Дирака. $\forall u \in V: \deg u \geq \frac{n}{2} - G(V,E)$ - гам.

$\deg u \geq \frac{n}{2}$;

$2\deg u \geq n$;

$\deg u + \deg v \geq n$ — теорема Оре.

ч.т.д.

Алгоритм построения гам. пути в усл. теор. Оре:

$\overline{\exists} e_{12} \Rightarrow \exists v_i, v_{i+1}$ т.ч. $\exists e_{1i}, e_{2(i+1)}$

В условиях теоремы Оре для $\forall u, v \in V$ т.ч.

$\overline{\exists} e_{uv} \Rightarrow \exists w_1, w_2 \in V: \exists e_1 = \overline{uw_1}, e_2 = \overline{uw_2},$

$e_3 = \overline{vw_1}, e_4 = \overline{vw_2}$;

Наличие вершин, смежных или с u, или с v, лишь увеличивает кол-во пар v_i, v_{i+1}, $\exists e_{ui}, e_{v(i+1)}$; и для u, и для v всегда существует хотя бы одна такая пара $v_i = w_1, v_{i+1} = w_2$ (или $v_i = w_2, v_{i+1} = w_1$).

ч.т.д.

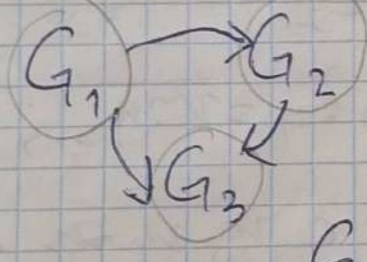
Алгоритм построения гам. цикла в усл. теор. Оре

$G(V,E)$ - гам. $\Rightarrow G(V,E)$ - полугам.

Т.к. теорема Оре — достаточное условие гамильтоновости, то $G(V,E)$ — гам., а любой гамильтонов путь в гамильтоновом графе можно дополнить до гамильтонова цикла (в цикле любая вершина может быть начальной, а значит, что любой гам. путь можно дополнить до цикла вне зависимости от нач. и кон. вершин).

Достаточно добавить v_1 из гам. пути, построенного алг. постр. гам. пути в усл. теор. Оре, в конец этого пути, чтобы получить гам. цикл.

Лемма 1. G — турнир $\Rightarrow \tilde{G}(G)$ — ацикл. турнир.



Согласно уже доказанному св-ву $\tilde{G}(G)$ — ациклический;

G — полный $\Rightarrow$ все к.с.с. слабо связаны $\Rightarrow$ $\tilde{G}(G)$ — полный (т.к. $G_1, \dots, G_k$ — полные).

$\tilde{G}(G)$ — ацикл., полный, однонапр. $\Rightarrow \tilde{G}(G)$ — турнир.

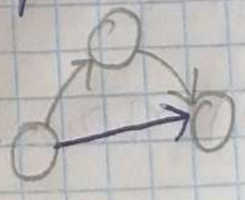
ч.т.д.

Лемма 2. G — ацикл. турнир $\Rightarrow G$ — полугам.

G — граф б.о. линейного порядка:

— все рёбра однонапр. $\Rightarrow$ б.о. антисимметрично

— G — ацикл. $\Rightarrow$ б.о. транзитивно (иначе возникают циклы длины 3)



$- G$-полный $\Rightarrow \forall a, b \in V: f(a,b)=1$ и/или $f(b,a)=1$

$(\forall v_1, v_2 \in V: \exists e = \overline{v_1 v_2}$ и/или $\exists e = \overline{v_2 v_1})$

В графе б.о. линейного порядка всегда можно построить гам. путь, на каждом шаге выбирая max вершину (v_1 - max $\Leftrightarrow \nexists v_2 \in V: \exists e = v_2 v_1, v_1 \neq v_2$).

Существование такой вершины на каждом шаге гарантировано (см. корректность Top Sort).

ч.т.д.

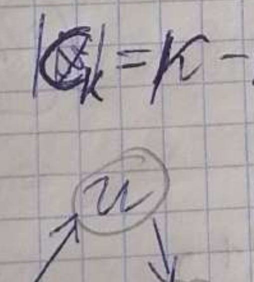
$\boxed{\text{Лемма 1, Лемма 2} \Rightarrow \forall G(V,E) \text{ - турнир} \Rightarrow G\text{-полу гам.}}$

$\boxed{G(V,E) \text{ - с.с. турнир} \Rightarrow G(V,E) \text{ - гамильтонов.}}$

Докажем, что в G $\exists$ гам. цикл.

Индукция по $|C_k| = k$ - кол-во вершин в гам. цикле.

<u>База:</u> $k=3$.



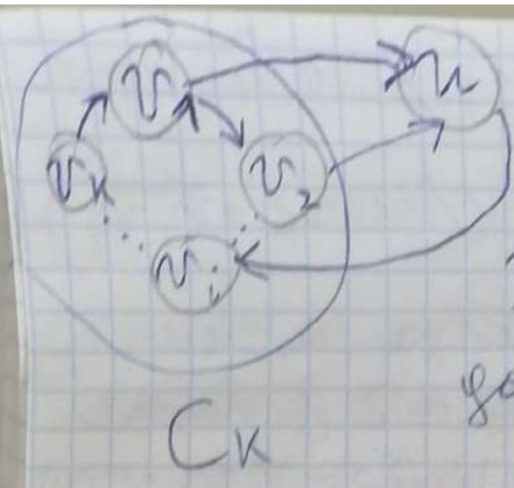
$V_1 = \{\alpha \in V \mid \exists e = \overline{\alpha u}\} = \{v_1\}$

$V_2 = \{\beta \in V \mid \exists e = \overline{u \beta}\} = \{v_2\}$

G-с.с. $\Rightarrow V_1, V_2 \neq \emptyset$.

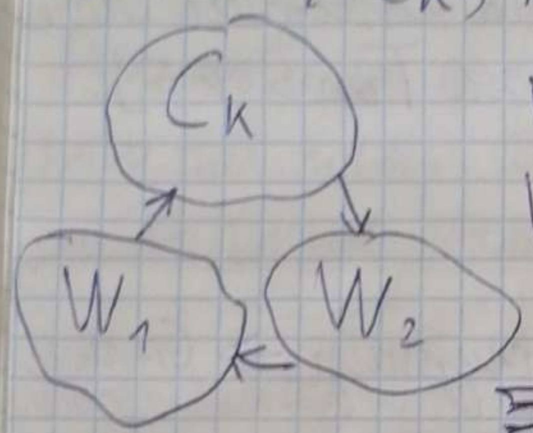
Переход: $\exists C_k$ - гам. цикл для $V_k \supset V$:

I. $\exists u \notin C_k$, т.ч. $\exists \alpha, \beta \in C_k: \exists e_1 = \alpha u, e_2 = u\beta$;



пусть v_i – min по # вершина, т.ч. $\exists e = \overline{u v_i}$; тогда $\exists e = \overline{v_{i-1} u}$. Убрав $e = \overline{v_{i-1} v_i}$, u можно добавить в C_k.

II. $\nexists u \notin C_k$, т.ч. $\exists \alpha, \beta \in C_k : \exists e_1 = \overline{\alpha u}$, $e_2 = \overline{u \beta}$:



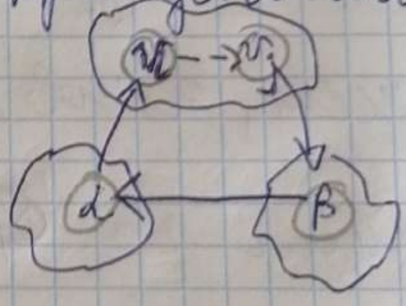
$W_1 = \{\alpha \in V \mid \exists e = \alpha w_1, w_1 \in C_k\}$

$W_2 = \{\beta \in V \mid \exists e = w_2 \beta, w_2 \in C_k\}$

G – с.с. $\Rightarrow W_1, W_2 \neq \emptyset$.

$\nexists u \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Убрав $e = \overline{v_i v_j}$, $v_i, v_j \in C_k$, при условии что $\exists e_1 = \overline{\alpha v_i}$, $e_2 = \overline{v_j \beta}$, α, β можно добавить в C_k.



I – переход $C_k \to C_{k+1}$,
II – переход $C_k \to C_{k+2}$.

$C_{n-1} \to$ случай I $\to C_n$.

$G(V,E)$ – с.с. турнир $\Rightarrow G(V,E)$ – гам.,
$\breve{G}(G)$ – ацикл. турнир – теорема доказана.

Корректность кода Прюфера.

Построение.

При удалении листа $|E|$ и $|V|$ уменьшаются на 1, и $|V|-|E|-1=0$ остаётся верным; связность также не нарушается. Т.о., на каждом шаге $T(V,E)$ остаётся деревом.

При этом у $T(V,E)$ на каждом шаге имеются листья; иначе при $\deg(v) \geq 2$ $\forall v \in V$ $T(V,E)$ содержит циклы.

Восстановление.

I. Т.к. при построении в код $Pruf(G)$ заносятся смежные с листьями вершины, то изначальных листьев не будет в $Pruf(G)$; значит, что на очередном шаге $\min v \notin Pruf(G)$ будет тем листом, соединённым с другой $w \in V$, $w \in Pruf(G)$.

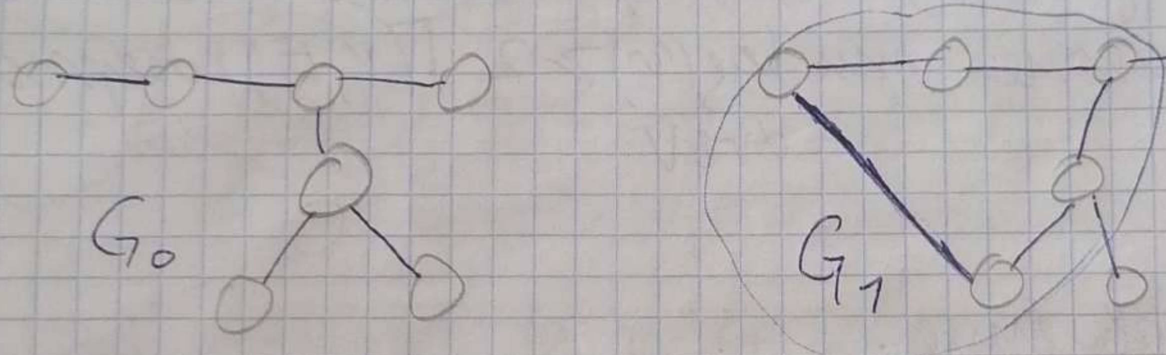
II. Для вершин с изначально $\deg(v) > 1$ количество включений в $Pruf(G)$ равно $\deg(v)-1$, и после построения всех смежных „листьев“ $v \notin Pruf(G)$, что относит к случаю I.

Теорема. $\mu(G)$ – кол-во главных циклов в G.

1. Для дерева $\mu(G) = |E| - |V| + \xi = -1+1=0$, ведь деревья – ацикличные графы, где $|V| = |E| + 1$.

2. При добавлении ребра в дерево $\mu(\tilde{G}_1) = \mu(G_0)+1$

Это действительно порождает ровно 1 цикл, т.к. добавленное в дерево ребро соединяет 2 вершины цепи, что образует цикл.



Теорема. $G(V,E)$, $T(V,\tilde{E})$ – ост. дерево, $C_1, \ldots, C_k$ – полный набор гл. циклов, порождённых T; Любой замкнутый простой путь Z можно представить как $Z = C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_s}$, $1 \leq i \leq k$.

1. Если Z – главный цикл, то разложение построено: $Z = C_i$.

2. Иначе $\exists$ хорду $e_1 \in C_1, e_1 \in Z$:

$e_1 \notin (Z \oplus C_1)$, т.к. e_1 встречается как в Z, так и в C_1.

Т.к. одна хорда порождает один главный цикл, то в $Z \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$ не содержит хорд; кроме того, раз Z – простой путь, то он не содержит $e \in \tilde{E}$ из нескольких пересекающихся циклов (только из одного), поэтому $Z \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_k \not\ni (e \in \tilde{E})$.

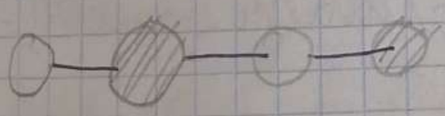
Т.о. $Z \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_k = 0 \iff Z = C_1 \oplus \ldots \oplus C_k$.

(т.к. $a \oplus 0 = a$)

ч.т.д.

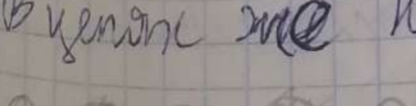
Теорема.
$G(V,E)$ – двудольный $\iff G \not\ni$ циклов нечётного порядка

В любой цепочке двудольного графа принадлежность вершин к V_1 и V_2 чередуется:



При этом в цепочках чётной длины $v_1 \in V_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow v_k \in V_2$ (и наоборот, $v_1 \in V_2 \Rightarrow v_k \in V_1$);

В цепях же нечётной длины



$v_1 \in V_1 \Rightarrow v_k \in V_1$ (и $v_1 \in V_2 \Rightarrow v_k \in V_2$)

Циклы образуются из цепей путём соединения

первой и последней вершина цепи рёбрам;
если цепь имеет нечётную длину k, то v_1 и v_k так или иначе принадлежат одному множеству вершин, и добавленное ребро инцидентно вершинам $v_1, v_k \in V_1$ ($v_1, v_k \in V_2$), что нарушает двудольность.

ч.т.д.

$\boxed{\text{Корректность модиф. алг. Куна}}$

1. Изначально $\tilde{E} = \varnothing$. Первый проход пути из S в F обращает ориентацию одного $e_1 \in E$, и $\tilde{E} = e_1$. Каждый последующий путь:

а) переходя из V_1 в V_2, обращает ориентацию $e_2 \in E$ в $v_2 \to v_1$; $\tilde{E} = \tilde{E} \cup e_2$.

б) переходя из V_2 в V_1, восстанавливает ориентацию $e_2 \in E$ в $v_1 \to v_2$; $\tilde{E} = \tilde{E} \setminus e_2$.

Т.к. переходы из V_1 в V_2 и из V_2 в V_1 чередуются (т.к. G – двудольный), то рёбра e_i, e_{i+1}, инц. общей вершине v_i, всегда имеют разную ориентацию, и только одно из них $\in \tilde{E}$.

Т.о. $\tilde{E}$ на каждом шаге – паросочетание.

2. Т.к. в п.1 было доказано, что переходы из V_1 в V_2

и из V_2 в V_1, пути из S в F должны чередоваться, то очевидно, что любой путь $S \to F$ содержит $K \vdots 2$ рёбер $\in E$.

При этом, т.к. путь по нефиктивным $e \in E$ начинается в V_1, то кол-во рёбер, ориентированных из V_1 в V_2, на 1 больше, чем из V_2 в V_1: $|E_{12}| = |E_{21}| + 1$ (за каждым переходом $V_2 \to V_1$ следует переход $V_1 \to V_2$);
обращение ориентации рёбер меняет эти множества местами:

$$|E_{12}| = |E_{21}| + 1 \longrightarrow |E_{21}| = |E_{12}| + 1$$

до шага после шага

т.о. $|\tilde{E}_{i+1}| = |\tilde{E}_i| + 1$.

3. $\exists \tilde{E}$ и $\hat{E}$ - 2 паросочетания, $|\tilde{E}| > |\hat{E}|$,
$\tilde{e} \in \tilde{E}$, $\hat{e} \in \hat{E}$.

симм. разн. $\tilde{E} \oplus \hat{E}$ - цепь чередующихся $\tilde{e}$ и $\hat{e}$
(иначе $\tilde{E} \oplus \hat{E} = 0 \Rightarrow |\tilde{E}| = |\hat{E}|$);

цепь чётной длины — $\hat{e}_1 \tilde{e}_1 \hat{e}_2 \tilde{e}_2 \ldots \Rightarrow |\tilde{E}| = |\hat{E}|$.
цепь нечётной длины — $\tilde{e}_1 \hat{e}_1 \tilde{e}_2 \hat{e}_2 \ldots \tilde{e}_n \Rightarrow |\tilde{E}| > |\hat{E}|$

(если цепь - $\hat{e}_1 \ldots \hat{e}_n$, то $|\hat{E}| > |\tilde{E}|$ или $|\hat{E}| = |\tilde{E}|$)

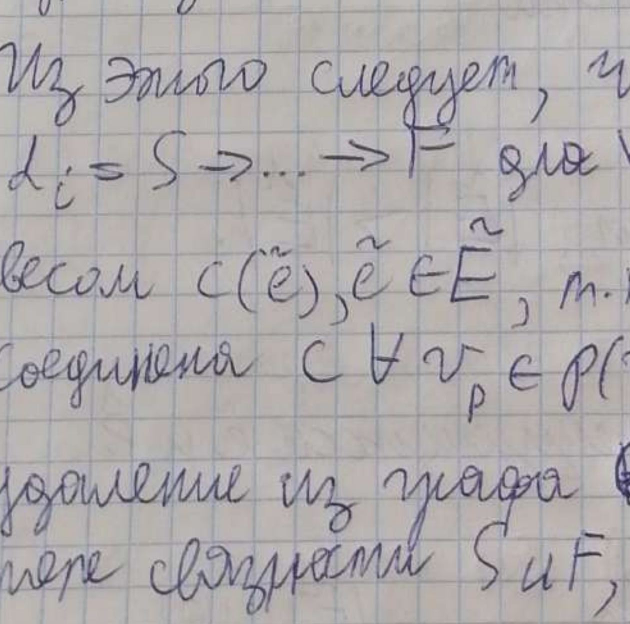
Алгоритм Куна как раз осуществляет нахождение в принадлежности $\tilde{E}$ рёбер, цепи чередующихся в начиная с $e_1 \in \tilde{E}$; выше было доказано, что такое паросочетание является наибольшим.

Теорема Форда – Фалкерсона:
величина max потока $= \sum\limits_{\tilde{e} \in \tilde{E}} c(\tilde{e})$, где $\tilde{E}$ – min разрез, разделяющий S и F.

$\tilde{E}$ состоит из $e \in \hat{E}$, соединяющих 2 к.с., одна из которых содержит S, другая – F.

Т.о. каждый путь $S \to F$ содержит хотя бы одно из $\tilde{e} \in \tilde{E}$.

Из этого следует, что $f(e)$ одного из $e \in \alpha_i$, $\alpha_i = S \to \ldots \to F$ для $\forall \alpha_i$ ограничен сверху весом $c(\tilde{e})$, $\tilde{e} \in \tilde{E}$, т.к. ~~одна~~ v не может быть соединена с $\forall v_p \in p(v)$ рёбрами $e \notin \tilde{E}$ (иначе удаление из графа всех $\tilde{e} \in \tilde{E}$ не приведёт к потере связности S и F, и $\tilde{E}$ не является разрезом).



$$\sum_{e \in p(v)} f(e) = c(\tilde{e}), \quad \tilde{e} \in \tilde{E}$$

$$c(\tilde{e}) - \sum_{e \in Ch(v)} f(e) = 0$$

$$\sum_{e \in Ch(v)} f(e) = c(\tilde{e})$$

При этом любой $\alpha_i = S \to \ldots \to F$ не может проходить через $\tilde{e} \in \tilde{E}$, $\tilde{e} \in \alpha_j \neq \alpha_i$; ведь после построения α_j $\sum\limits_{e \in p(v)} f(e) = \sum\limits_{\tilde{e} \in \tilde{E}} c(\tilde{e})$ — такой

поток уже не может измениться ($\min\limits_{e \in \alpha_i} f(e) = \min\limits_{e \in \alpha_j} f(e)$).

Т. о. сумма потоков вершин, которым инцидентны $\tilde{e} \in \tilde{E}$, равна $\sum\limits_{\tilde{e} \in \tilde{E}} c(\tilde{e})$.

Эта сумма является ограничением сверху для $\sum\limits_{e \in E} f(e)$, т. к. по условию теоремы $\sum\limits_{\tilde{e} \in \tilde{E}} c(\tilde{e}) =$

$= \min$ (т. е. на любом $\alpha_i = S \to \ldots \to F$ $\underset{e \in \alpha_i}{c(e)} \geq \underset{\substack{\tilde{e} \in \tilde{E} \\ \tilde{e} \in \alpha_i}}{c(\tilde{e})}$)

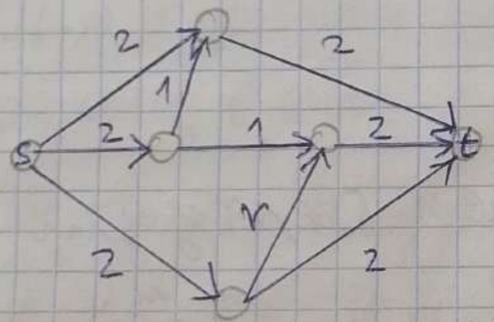
ч. т. д.

$\boxed{\text{Корректность алгоритма Форда – Фалкерсона.}}$

Из док-ва теоремы Ф-Ф следует, что $\forall$ путь $\alpha_i = S \to \ldots \to F \ni (\tilde{e} \in \tilde{E})$; т. к. $\sum\limits_{\tilde{e} \in \tilde{E}} c(\tilde{e}) = \min$, то $\min\limits_{e \in \alpha_i} \{c(e)\} = c(\tilde{e})$, $\tilde{e} \in \tilde{E}$, $\tilde{e} \in \alpha_i$, и после одного потока пока $c(\tilde e') = c(\tilde e') - c(\tilde e') = 0$; т.о. каждый рассмотренный $\alpha_i = s \Rightarrow \dots \to t$ проходит ровно через одну уникальную $\tilde e \in \tilde E$, и $\sum_{e \in E} f(e) = \sum_{\tilde e \in \tilde E} c(\tilde e)$, что является max потоком.

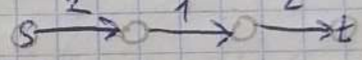
Доказать, что алг. Ф-Ф для некот сети не сойдётся (сойдётся не к max потоку)

взято с users.math-cs.spbu.ru/~okhotin/teaching/
/tcs1_2018/okhotin-tcs1alg_2018_l8.pdf

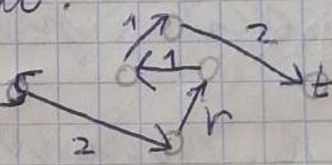


$r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

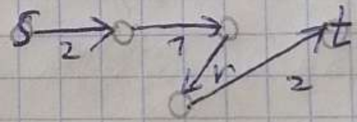
начало:



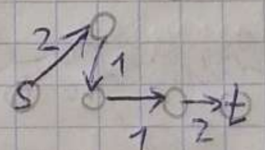
I:



II:



III:



После применения начального пути через дуги 2, 1, 2 $f(e) = 1$, и через 3 центральные дуги с $c(e) = 1, 1, r$ проходит $f(e) = 0, 1, 0$. Утверждается, что после k применений путей I, II, I, III через три центральных дуги будет проходить $f(e) = 1 - r^{2k}, 1, r - r^{2k+1}$. Это верно для $k = 0$. Заметим, что $r^2 = 1 - r$, и поэтому $r^k - r^{k+1} = r^{k+2}$.

Пусть через 3 центральных дуги проходит $f(e) = 1-r^{2k}, 1, r-r^{2k+1}$, для $k \geq 0$. Путь I добавляет $r^{2k+1} \Rightarrow f(e) = 1-r^{2k}+r^{2k+1}, 1-r^{2k+1}, r = 1-r^{2k+2}, 1-r^{2k+1}, r$.

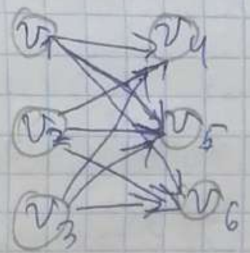
Путь II добавляет r^{2k+1}, получается $f(e) = 1-r^{2k+2}, 1, r-r^{2k+1}$. Путь I добавляет r^{2k+2}, получается $f(e) = 1, 1-r^{2k+2}, r-r^{2k+1}-r^{2k+2} = 1, 1-r^{2k+2}, r-r^{2k+3}$. Путь III добавляет r^{2k+2}, $f(e) = 1-r^{2k+2}, 1, r-r^{2k+3}$.

Поток, выходящий из S по верхней дуге после k шага равен $\sum_{i=1}^{k} r^{2i} = r(1-r^{2k})$. По средней дуге: $\sum_{i=0}^{k} r^{2i} = \frac{1}{r}(1-r^{2k+2}) = (1+r)(1-r^{2k+2})$. По нижней дуге: $\sum_{i=1}^{2k} r^{i} = \frac{1}{r}(1-r^{2k}) = (1+r)(1-r^{2k})$. Предел величины потока при $k \to \infty$, равен $3r+2 < 5$.

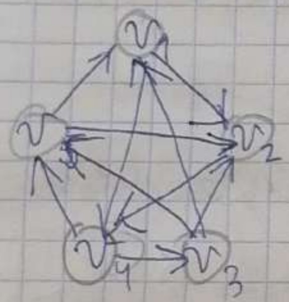
Доказать, что плоскость сети для мод-ии алг. Ф-Ф для плоской сети имеет значение

Принцип построения пути в данной модификации требует, чтобы все вершины текущего пути находились „выше", чем $\forall v \in V, v \in L_j \neq L_i$.

Докажем, что в подграфах $K_{3,3}$ и K_5, присутствующих внешних графов, это невозможно.



$K_{3,3}$: в пути $v_2 \to v_4$ v_2 находится ниже v_1, но v_4 находится выше v_5; неясно, какой из путей выше: $v_2 \to v_4$ или $v_1 \to v_5$. Если поменять v_4 и v_5 местами, то изменятся лишь вершины в тех же пересекающихся путях: $v_2 \to v_5$ и $v_1 \to v_4$.



K_5: $v_2 \to v_4$ и $v_3 \to v_5$ пересекаются; v_5 выше v_4, v_2 выше v_3. Если „поднять" v_4, то начинают пересекаться пути $v_4 \to v_2$ и $v_1 \to v_3$.

Т.о. пересекающиеся пути делают выбор на определённом месте „верхнего" пути неоднозначным (т.к. вершины нельзя переставить так, что $\forall v \in L_i$ выше $\forall v \in L_j$).

ч.т.д.

$\boxed{\text{Корректность алгоритма проталкивания предпотока.}}$

Каждый шаг алгоритма производит либо проталкивание, либо поднятие.

– При проталкивании $\sum e(u)$ не изменяется;
$u \in V$

однако $e(u)$ уменьшается в родительской вершине и увеличивается в дочерней на ту же величину:

$e(v) := e(v) + \delta f$ $\quad v \in ch(u)$

$e(u) := e(u) - \delta f$

Если дочерняя вершина $u = F$, то хоть и $\sum_{u \in V} e(u)$ не изменяется, но $\sum_{u \in V \setminus \{S, F\}} e(u)$ уменьшается на δf.

Если дочерняя вершина $u \neq F$, то эксцесс „перемещается" по пути из S в F; т.к.:

– При подъёме любой $u \in V$, $u \neq S$, $e(u) > 0$ $\quad h(u) \le h(S)$ (т.к. $h(S) = |V|$), $h(u) \geq h(v)$, $v \in ch(u)$;

т.е. пути строятся согласно ориентации рёбер и не могут вернуться в S; в циклах, возвращающихся в S, наличие эксцесса в вершине перед S заставит эту вершину подняться, „отправляя назад", как при поиске в глубину.

Необходимое и достаточное условие непланарности графа — теорема Вагнера:
граф $G(V,E)$ планарен $\Leftrightarrow$ G $\nexists$ графов, гомеоморфных K_5 и $K_{3,3}$.

def

Минор графа G — граф H, образованный из G удалением вершин и стягиванием рёбер.

Теорема. граф планарен $\Leftrightarrow$ его миноры $\nexists$ ни K_5, ни $K_{3,3}$.

Док-во:

Переформулируем теорему:
„В графе G есть миноры, содержащие K_5 или $K_{3,3}$ тогда и только тогда, когда существует подграф G, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$".
Непланарность $K_{3,3}$ и K_5 следует из Эйлеровой характеристики ($|V|-|E|+|\#\text{граней}|=2$):
K_5: следствие Эйлеровой хар-ки — если каждая грань ограничена ≥ 3 рёбрами, а каждое ребро разделяет 2 грани, то
$3|\#\text{граней}| \leq 2|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V|-6$;

для K_5 не выполняется $|E| \leqslant 3|V|-6$:

$10 > 15-6 = 9.$

$K_{3,3}$: граф имеет 5 граней (по эйлеровой х-ке).

Любая грань, включая внешнюю, содержит чётное число рёбер ($\geqslant 4$). Т.к. каждое ребро разделяет ровно 2 грани, то $4|\#\text{граней}| \leqslant 2|E|$;

$4 \cdot 5 > 2 \cdot 9$ — неравенство не выполняется.

1. Если в G $\exists$ минор $\ni K_{3,3}$, тогда в G $\exists$ подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$.

Всилу определения минора, если в G $\exists$ минор $\ni K_{3,3}$, значит $\exists$ мн-ва вершин U_1, U_2, U_3, W_1, W_2, W_3 попарно не пересекающиеся, образующие связный подграф G, т.ч. для $\forall i, j$ $\exists u_{i,j} \in U_i$ и $w_{i,j} \in W_j$ и $(u_{i,j}, w_{i,j}) \in E$.

Следовательно, для $\forall i$ $\exists$ поддерево в G, у которого 3 листа $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, w_3 \in W_3$, а остальные вершины $\in U_i$. Также для j.

Вследствие леммы о трёхлистном дереве

с $|V|=3$ гомеоморфно $K_{3,3}$. Т.о. в G $\exists$ подграф, гомеоморфный 6 копиям $K_{1,3}$, соединённым 3×3 — т.е. $K_{3,3}$.

2. Если в G $\exists$ минор $\ni K_5$, тогда в G $\exists$ подграф, гомеоморфный либо $K_{3,3}$, либо K_5.

В силу определения минора, если в G $\exists$ минор $\ni K_5$, значит $\exists$ мн-ва вершин $U_1, \dots, U_5$ попарно непересекающиеся, образующие связный подграф G, т.ч. для $\forall i \neq j$ $\exists u_{i;\{i,j\}} \in U_i$ и $u_{j;\{i,j\}} \in U_j$, т.ч. $u_{i;\{i,j\}}$ и $u_{j;\{i,j\}} \in E$. Следовательно, для $\forall i$ $\exists$ поддерево $T_i \subset G$ с 4 листьями, по одному листу в $\forall U_j$ и остальными вершинами в U_i, $i \neq j$.

Вследствие леммы о рукопожатиях дерево с 4 вершинами гомеоморфно либо $K_{1,4}$ либо двум связным $K_{1,3}$. Значит, в G $\exists$ подграф, гомеоморфный 5 копиям $K_{1,4}$, соединённым друг с другом — получаем K_5.

Иначе подграф, гомеоморфный $K_{3,3}$ может быть получен следующим образом:

1. Берём одно из T_i, гомеоморфное соединённым $K_{1,3}$.
Назовём их $T_{i,r}$ и $T_{i,b}$.
2. Покрасим в красный вершины $T_{i,r}$ за исключением двух синих.
3. Покрасим в синий вершины $T_{i,b}$ за исключением двух красных.
4. Покрасим в синий вершины $T_j \ni T_{i,r}$.
5. Покрасим в красный вершины $T_j \ni T_{i,b}$.
6. Удалим рёбра, соед. вершины одного цвета из разных T_j.

Это приведёт к тому, что T_j будут иметь по 3 вершины, содержащиеся в таком подграфе, что она окрашена в цвет, отличный от цвета остальных вершин. Граф, сформированный из красных и синих вершин с оставшимися рёбрами изоморфен $K_{3,3}$.

(лемма о рукопожатиях — $\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$, G-неор.)

Теорема Хивуда: G - плоский $\Longleftrightarrow \chi(G) \leq 5$.

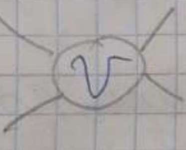
Лемма. G-плоский $\Rightarrow \exists v \in V: \deg(v) \leq 5$.
(иначе, если $\forall v \in V \ \deg(v) \geq 6$, то $G \supset K_5$ и не явл. плоским)

Пусть v – такая вершина.

1. $\deg(v) = 5$

Если $\chi(G) = 5$, то ~~клика~~ клика в G – K_5, и $v \in K_5$; т.о. $\chi(G) \leq 4$, т.к. не все $w \in V$, смежные с v, связаны между собой.

2. $\deg(v) < 5$



$\chi(G) \leq 4$; кроме того, $w \in V$ можно окле-ить, это не влияет на правильность раскраски, на $\chi(G)$ или на истинность $\deg(v) < 5$.

Свойства хроматического мн-лена $P_G(x)$.

2) $\deg(P_G(x)) = n$

Верхняя оценка – $P_G(x) \leq x^n$ – очевидно

Нижняя оценка – $P_G(x) \geq \frac{x!}{(x-n)!} = x(x-1)\dots(x-(n-1)) =$
$= x^n(1-x^{-1})\dots(1-(n-1)x^{-1}) \Rightarrow \deg(P_G(x)) = n$.

3) $a_n = 1$

Верхняя оценка – $P_G(x) \leq x^n$ – очевидно

Нижняя оценка – $P_G(x) \geq \frac{x!}{(x-n)!} = x(x-1)\dots(x-(n-1)) =$

$= x^n (1-x^{-1}) \dots (1-(n-1)x^{-1}) \Rightarrow a_n = 1.$

5) Из св-ва 4 $P_G(x) = \prod_{i=1}^{k} P_{G_i}(x)$, а из св-тв 2 и 3 $\deg(P_{G_i}(x)) = n$, $a_n = 1$ для $\forall P_{G_i}(x)$;

т.к. $P_G(x) \geq x(x-1)\dots(x-(n-1))$, то так для каждой к.с. $\deg(P_{G_i}(x)) \geq 1$, и $P_{G_i}(x) \not\ni$ свободного члена (т.е. из $\forall P_{G_i}(x)$ можно вынести x).

6) $|a_{n-1}| = |E|$

Индукция по $|E|$ в $G(V, E)$, $|V| = n$

База. $|E| = 0 \Rightarrow P_{G_0}(x) = x^n$.

$|E| = 1 \Rightarrow P_{G_1}(x) = x^n - x^{n-1}$.

Переход. пусть $P_{G_K}(x) = x^n - x^{n-1} \cdot K + \dots$

тогда добавление ребра в E делает невозможным получение раскрасок для подграфа на $n-1$ вершинах для случая, когда вершины, инцидентные добавленному ребру, имеют одинаковый цвет.

Т.о. $P_{G_{K+1}}(x) = x^n - x^{n-1} \cdot (K+1) + \dots$

(т.к. по свойству 2 степень такого подграфа равна $(n-1)$, а $a_{n-1} = 1$).

7. $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots$ – знакочередующаяся последов.

Индукция по $|V| = n$:

База: $n = 1 \Rightarrow P_{G_1}(x) = x$.

Переход: $\exists$ свойство верно для $PG_n(x)$.

$\forall\ G_{n+1}$;

Индукция по $|E| = m$:

Если $|E| = 0$, то $P_{G_{n+1}}(x) - x^{n+1}$, св-тво верно.

$\exists$ свойство верно для $P_{G_{n+1,m}}(x)$.

$\forall\ G_{n+1,m+1}$ и ребро uv.

Пусть $\tilde{G} = G_{n+1,m+1} / uv$, $\hat{G} = G_{n+1,m+1}(uv)$.
(слияние u и v)

Тогда из теоремы о редукций:

$P_{G_{n+1,m+1}} = P_{\tilde{G}} + P_{\hat{G}}$.

т.к. $G_{n+1,m}$ – граф с $n+1$ верш. и m рёбрами, а в G_2 – n вершин, то

для $\tilde{G}$ и $\hat{G}$ теорема верна:

$P_{\tilde{G}}(x) = x^{n+1} - a_1 x^n + a_2 x^{n-1} - \dots$

$P_{\hat{G}}(x) = x^n - b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} - \dots$

подставляем в теор. о редукции:

$P_{G_{n+1,m+1}} = x^{n+1} - (a_1 + 1) x^n + (a_2 + b_1) x^{n-1} + \dots$

Видно, что коэфф. в $P_{G_{n+1,m+1}}$ — знакочер. посл.

ч.т.д.

8. G — связный, $E \neq \varnothing \Rightarrow P_G(x) = (x-1)^s t(x)$, $t(1) \neq 0$,
s — кол-во блоков

Блок без сочленения — К.С. на $n-1$ вершинах;
т.о., $P_{\tilde{G}}(x) = (x-1)^n + a_1(x-1)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x-1) = \left(x^n - x^{n-1} + a_1(x^{n-1} - x^{n-2}) + \dots + a_{n-1}(x^2 - x)\right) \setminus x$ — можно вынести $(x-1)$.

Теорема о разделяющей клике:

$$P_G(x) = \frac{P_Q(x)\, P_R(x)}{P_L(x)}$$

L — клика.

Индукция по $|V|$ в L:

База: $|V| = 0 \Rightarrow Q$ и R — К.С.

$$P_G(x) = P_Q(x)\, P_R(x) = \frac{P_Q(x)\, P_R(x)}{\frac{x!}{x!}}.$$

Переход: $|V| = n$.

Пусть верно $P_G(x) = \dfrac{P_Q(x)\, P_R(x)}{x(x-1)\dots(x-(n-1))}$,

Тогда добавление вершины в клику L в $(x-n)$ увеличивает кол-во раскрасок L в $(x-n)$
увеличивает кол-во раскрасок ~~кол-во раскрасок~~

Т.о. как в Q, так и в R кол-во раскрасок увеличится также в $(x-n)$ раз, как и в их объединении $(x-n)$: $\frac{(x-n)^2}{(x-n)} = (x-n)$.

Т.о. $P_{G_{n+1}}(x) = \frac{P_{G_n}(x)}{x-n} = \frac{P_Q(x)\,P_R(x)}{x(x-1)\ldots(x-(n-1))(x-(n+1-1))} =$

$$= \frac{P_Q(x)P_R(x)}{x(x-1)\ldots(x-n)}.$$

ч.т.д.

Корректность алгоритма Прима

На каждом шаге алгоритм Прима соединяет уже выбранную и ещё не выбранную вершину.

Таким образом:

- Алгоритм составляет ациклический граф, поскольку в цикле начальная вершина встречается дважды — т.е. необходимо соединить (все) 2 уже пройденные вершины.

- Алгоритм составляет граф, в котором $|E|=|V|-1$ (т.к. 1 вершина уже добавлена на начальном шаге, и на каждом шаге $V\cup\{v\}$, $E\cup\{e\}$)

- Алгоритм составляет минимальное остовное дерево, согласно лемме о безопасном ребре:

<u>Лемма</u>. $\exists$ $G(V,E)$ и $f: E\to\mathbb{R}$. Пусть $G'(V,E')$ - подграф некоторого мин. ост. дерева G, (S,T) - разрез G, т.ч. $\forall e\in E'$ не пересекает разрез, а $\overline{uv}$ - ребро, $f(\overline{uv})=\min$ среди $e\in E$, пересекающих разрез. Тогда при добавлении его в G' ($G'\cup\{\overline{uv}\}$) получившийся граф также является подграфом некоторого $\min T_G$.

<u>Док-во</u>.

Достроим E' до некоторого $\min T_G$. Если $e\in T_G$ - лемма доказана. Рассмотрим $e\notin T_G$: $\exists$ путь в T_G $u\to\ldots\to v$. Т.к. u и v $\in$ разным мн-вам разреза, то хотя бы одно ребро пути пересекает разрез; обозначим его e'. По условию $f(e)\leq f(e')$. Заменим e' в T_G на e.

Полученное дерево также является min остовным деревом, поскольку $\forall v \in V$ связаны и $\sum f(e)$ не увеличилась. Следовательно, $E' \cup \{e\}$ можно дополнить до min T_G.

Корректность алгоритма Краскала

Если на шаге алг. Краскала $e \in E$ соединяет $v_1, v_2 \in$ одной к.с., то добавление e в T_G приводит к образованию цикла; т.о. e соединяет разные к.с. Тогда $\exists$ разрез (S, T) такой, что S и T являются компонентами связности; тогда $f(e) = \min$ (e – min ребро, пересекающее разрез (S, T)). Значит, из леммы о безопасном ребре следует, что e является безопасным и его можно добавить в T_G.

На последнем шаге $e \in E$ соединит две оставшиеся к.с. S и T, и $T_G = (V, \hat{E})$.

Корректность алгоритма Дейкстры

Пусть $G(V, E)$ – ор. взвеш. граф, $\varphi(e) \geq 0$, $S \in V$. Тогда после выполнения алг. Дейкстры $\delta(u) = \rho(S, u)$ для $\forall u \in V$, где $\rho(S, u)$ – длина кратчайшего пути из S в u.

Док-во:

Индукция по кол-ву шагов n.

База: на $n=1$ $б'(S) = \rho(S,S) = 0$.

Переход: пусть для n шагов алгоритм сработал верно, и на $n+1$ шаге выбрана $u \in V$. Докажем, что $б'(u) = \rho(S,u)$:

Для $\forall v \in V$ $б'(v) \geq \rho(S,v)$.

Пусть P – кратчайший путь из S в u, v – первая непосещённая вершина на P, z – предшествующая ей непосещённая вершина.

Поскольку P – кратчайший, его часть $S \to z \to u$ также кратчайшая $\Rightarrow \rho(S,v) = \rho(S,z) + \cancel{f}(zv)$. По предположению индукционного перехода в момент посещения z $б'(z) = \rho(S,z)$, следовательно, метка v не больше, чем $б'(z) + \cancel{f}(zv) = \rho(S,z) + f(zv) = \rho(S,v) \Rightarrow б'(v) = \rho(S,v)$.

С другой стороны, т.к. метка u минимальна среди непосещённых ($б'(u) \leqslant б'(v) = \rho(S,v) \leqslant \rho(S,u)$) – вес пути до промежуточной вершины не превосходит веса пути до конечной вершины вследствие $f(e) \geq 0$.

Вместе с $б'(u) \geq \rho(S,u)$ имеем $б(u) = \rho(S,u)$.

Корректность алгоритма Форда – Беллмана.

Пусть $d[k][u]$ – кол-во путей из k рёбер, ведущих в u. Тогда $d[k][u] = \sum\limits_{\overline{vu} \in E} d[k-1][v]$.

Пусть S – стартовая вершина. Тогда длина кратчайшего пути $d[k][u] = \min\limits_{\overline{vu} \in E} (d[k-1][v] + f(\overline{u,v}))$,

$d[0][S] = 0$, $d[0][u] = +\infty$.

<u>Док-во</u> корректности:

Докажем, что после всех шагов ал. Ф-Б выполняется $\rho(S, u) \leqslant d'[u] \leqslant \min\limits_{i=0..k} d[i][u]$

Индукция по длине пути k:

База: при $k=0$ $\rho(S,u) \leqslant +\infty \leqslant +\infty$

Переход: Докажем, что $\rho(S,u) \leqslant d'[u]$.

Пусть после $k-1$ шагов $\rho(S,u) \leqslant d'[u] \leqslant \min\limits_{i=0...k-1} d[i][u]$

Тогда после k шагов $\rho(S,v) = \min\limits_{u \in V} (\rho(S,u) + f(\overline{uv})) \leqslant$

$\leqslant \min\limits_{u \in V} (d'[u] + f(\overline{uv})) = d'[v]$.

Докажем, что $d'[u] \leqslant \min\limits_{i=0..k} d[i][u]$.

1. $\min\limits_{i=0...k+1} d[i][u] = d[k+1][u]$

$d'[u] \leqslant d'[v] + f(\overline{vu}) \leqslant d[k][v] + f(\overline{vu}) = d[k+1][u]$

2. $\min\limits_{i=0..k+1} d[i][u] = d[j][u] = \min\limits_{i=0..j} d[i][u]$ — аналогично

(случай 1 – добавление k+1-го ребра в путь;
(случай 2 – изменение пути на путь через j вершин)

т.о. переход индукции выполняется.

Сходимость алгоритма Эдмондса – Карпа

__Лемма.__ Если в сети $G(V, E)$ с истоком S и стоком F увеличение потока производится вдоль кратчайших путей $S \to F$, то для $\forall v \in V \setminus \{S, F\}$ длина кратчайшего пути $\delta(S, v)$ в остаточной сети не убывает после каждого увеличения потока.

__Док-во.__ Положим обратное: пусть $\exists v \in V \setminus \{S, F\}$, т.ч. после увеличения потока длина кратчайшего пути из S в v уменьшилась. Обозначим увеличенный поток f за f'. Пусть v – вершина, расстояние $\delta'(S, v)$ до которой минимально и уменьшилось с увеличением потока: $\delta'(S, v) < \delta(S, v)$. Рассмотрим путь

$p = s \to \ldots \to u \to v$, являющийся кратчайшим от s к v. Тогда верно, что $\delta'(s,u) = \delta'(s,v) - 1$.

Получаем, что $\delta'(s,u) \geq \delta(s,u)$.

Предположим $(u,v) \in E$, тогда $\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + 1 \leq \delta'(s,u) + 1 = \delta'(s,v)$. Это противоречит гипотезе $\delta'(s,v) < \delta(s,v)$.

Теперь пусть $(u,v) \notin E$, но $(u,v) \in E'$.

Появление ребра (u,v) после увеличения потока означает увеличение потока по обратному ребру (v,u). Такое увеличение происходит вдоль кратчайшего пути, поэтому такой путь из s в u имеет вид $s \to \ldots \to v \to u$, из чего получаем $\delta(s,v) = \delta(s,u) - 1 \leq \delta'(s,u) - 1 = \delta'(s,v) - 2$. Это противоречит $\delta'(s,v) < \delta(s,v)$.

ч.т.д.

$\boxed{\text{Сходимость алгоритма Диница.}}$

На каждом шаге после построения слоистой сети из неё в $\sum f(e)$ добавляется блокирующий поток: такой поток, что в $\forall$ пути $s \to t$

$\exists e,\ f(e)=c(e)$.

Положим, что в какой-то момент в слоистой сети не удалось найти блокирующий поток.

Это означает, что пути $S\to F$ не существует в слоистой сети. Но поскольку слоистая сеть $\ni$ все кратчайшие пути из S в остаточной сети, это в свою очередь значит, что в остаточной сети нет пути $S\to F$. Применяя теорему Форда-Фалкерсона, получаем, что текущий поток максимален.

ч.т.д.

$\boxed{\text{корректность алгоритма Флойда-Уоршелла.}}$

Докажем, что на каждом шаге алгоритма верно
$\rho(u,v) \leqslant d_{uv} \leqslant d_{uv}^{(i)}$,

где $\rho(u,v)$ – кратчайшее расстояние от u до v,

d_{uv} – значение в матрице (конечное), $d_{uv}^{(i)}$ – значение в матрице на шаге i.

Док-во. Индукция по кол-ву шагов i.

База: $i=0$. Очевидно, $\rho(u,v) \leqslant c(u,v) \leqslant c(u,v)$
или $\rho(u,v) \leqslant \infty \leqslant \infty$.

Переход: пусть d'_{uv} – значение d_{uv} сразу после $i-1$ итерации.

Покажем, что $d'_{uv} \leq d^{(i-1)}_{uv} \Rightarrow d_{uv} \leq d^{(i)}_{uv}$.

1. Значение d_{uv} стало меньше, чем $d^{(i-1)}_{uv}$.

Тогда $d^{(i)}_{uv} = d^{(i-1)}_{ui} + d^{(i-1)}_{iv} \geq d'_{ui} + d'_{iv} \geq d_{uv}$.

Докажем неравенство от противного. Пусть неравенство было нарушено на i-ой итерации, и в этот момент изменилось значение d_{uv}, и выполнилось $\rho(u,v) > d_{uv}$. Так как d_{uv} изменилось, то $d_{uv} = d_{ui} + d_{iv} \geq \rho(u,i) + \rho(i,v) \geq \rho(u,v)$.

(по неравенству треугольника).

$d_{uv} \geq \rho(u,v)$ – противоречие.

2. $d^{(i)}_{uv} = d^{(i-1)}_{uv} \geq d'_{uv} \geq d_{uv}$.

ч.т.д.

При наличии цикла с $\sum_{e \in C} c(e) < 0$ в матрице алг. Флойда – Уоршелла появятся отрицательные числа на главной диагонали.

Т.к. алгоритм релаксирует расстояния между всеми парами вершин, в т.ч. $i=j$, а начальные расстояние между $\rho(i,i)=0$, то релаксация может произойти только при $\exists$ вершины k, т.ч. $d_{ik} + d_{ki} < 0$, что эквивалентно наличию отрицательного цикла, проходящего через i.

Корректность алгоритма Джонсона.

Лемма:

Пусть P, Q — два пути $a \to \ldots \to b$ и $\rho(P) < \rho(Q)$.

Тогда $\forall \tilde{\rho}: \tilde{\rho}(P) < \tilde{\rho}(Q)$.

Док-во. Рассмотрим $P: x_0 \to x_1 \to \ldots \to x_k$.

Его вес с $\tilde{\rho}$ равен $\tilde{\rho}(P) = \tilde{\rho}(x_0 x_1) + \tilde{\rho}(x_1 x_2) + \ldots + \tilde{\rho}(x_{k-1} x_k)$.

По определению $\tilde{\rho}$: $\tilde{\rho}(P) = h(x_0) + \rho(x_0 x_1) - h(x_1) + \ldots + h(x_{k-1}) + \tilde{\rho}(x_{k-1} x_k) - h(x_k)$

Потенциалы всех промежуточных вершин сократятся:

$\tilde{\rho}(P) = h(x_0) + \rho(P) - h(x_k)$.

Изначально $\rho(P) < \rho(Q)$. С новой $\tilde{\rho}$ веса путей:

$\tilde{\rho}(P) = h(a) + \rho(P) - h(b)$

$\tilde{\rho}(Q) = h(a) + \rho(Q) - h(b)$

$\tilde{\rho}(P) < \tilde{\rho}(Q)$. ч.т.д.

Лемма. В графе G нет отрицательных циклов $\Leftrightarrow \exists h$ (потенц. ф-ция) $: \forall uv \in E \; \tilde{\rho}(u,v) \geq 0$.

Док-во.

$\triangleleft$ произвольный цикл $C \subset G$. По условию леммы $\rho(C) = \tilde{\rho}(C) + h(u_0) - h(u_0) = \tilde{\rho}(C) \geq 0$.

Добавим в G фиктивную вершину S, а также рёбра $S \to u$, $\forall u$ $c(S,u) = 0$.

Обозначим $\delta(u,v)$ как min расстояние между $u, v \in V$ и введём потенц. ф-цию h:

$h(u) = \delta(S,u)$.

$\triangleleft$ вес произвольного ребра $uv \in E$: $\tilde{\rho}(uv) = h(u) + \rho(u,v) - h(v) = \delta(S,u) + \rho(u,v) - \delta(S,v)$.

Поскольку $\delta(S,u) + \rho(u,v)$ – вес пути $S \to \ldots \to v$, а $\delta(S,v)$ – вес кратчайшего пути $S \to \ldots \to v$, то $\delta(S,u) + \rho(u,v) \geq \delta(S,v) \Rightarrow \delta(S,u) + \rho(u,v) - \delta(S,v) = \tilde{\rho}(u,v) \geq 0$.

ч.т.д.