Вопросы КиТГ

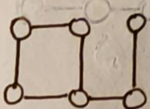
40. Полугамильтонов граф - определение. Теорема Дирака.

⌈G(V,E) - неориентированный⌋

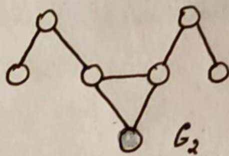
def⌋ **Гамильтонов путь** - открытый путь, содержащий каждую вершину графа, причем ровно один раз.

def⌋ **Полугамильтонов граф** - неориент. граф G, содержащий гамильтонов путь, называется полугамильтоновым

Примеры полугамильтоновых графов:



G_1



G_2

Теорема Дирака (достаточное условие гамильтоновости). Если степень любой вершины графа G больше либо равна половине количества вершин в этом графе, то граф является гамильтоновым.

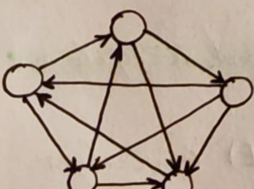
[$G(V,E)$ - неор. граф, $|V| = n \geqslant 3$. Если $\forall u \in V$ $\deg u \geqslant \frac{n}{2}$ $\Rightarrow$ G - гамильтонов]

41. Гамильтонов путь - определение. Турнир - определение, пример.

Определение 1 см. в п. 40 (с примерами)

def⌋ **Турнир** - полный граф $G(V,E)$, в котором все ребра направленные.

Примеры турнира:



G_1

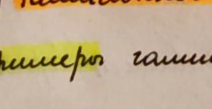
G_2

42. Гамильтонов граф - определение. Теорема Редеи-Камиона.

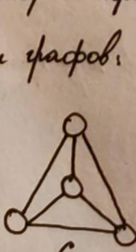
def⌋ **Гамильтонов цикл** - замкнутый путь, содержащий любую вершину, кроме начальной, ровно один раз (начальную - два раза).

def⌋ **Гамильтонов граф** - неориентированный граф G, содержащий гамильтонов цикл

Примеры гамильтоновых графов:



G_1



G_2

def **Турнир** – полный граф $G(V,E)$, в котором все рёбра направленные

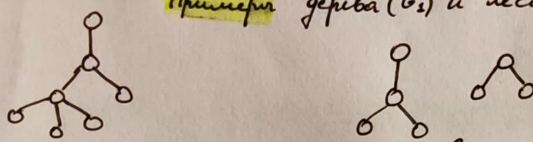
Теорема Редеи-Камиона. Любой сильно связный турнир – гамильтонов.

43. Дерево, лес – определение. Свойства деревьев (не меньше 4)

def **Дерево** – связный ациклический граф.

def **Лес** – граф, являющийся набором непересекающихся деревьев.

Примеры дерева (G_1) и леса (G_2)



G_1 $\qquad$ G_2

Свойства деревьев: $\quad G(V,E)$ – дерево

- G – связный, $|V| = n \Rightarrow |E| = n-1$
- Цикломатическое число дерева:
  $\mu(G) = |E| - |V| + 1 = 0$
- Любое дерево является двудольным графом
- Каждый связный граф $\tilde{G}(V,\tilde{E})$ допускает остовное дерево, которое является деревом, содержащий каждую вершину $\tilde{G}$ и чьи рёбра являются рёбрами $\tilde{G}$
- Любые две вершины графа G соединены единственным простым путём
- При добавлении в G любого ребра для несмежных вершин появляется один простой цикл

Г • ациклический – это по определению,
• связный ┘ – но, возможно, подойдёт и как свойство

44. Остовное дерево, остовный лес – определение. Код Прюфера. Восстановите дерево по данному коду Прюфера.

def **Остовное дерево** – для произвольного связного графа $G(V,E)$ существует дерево $T(V,\tilde{E})$, содержащее все вершины графа G и чьи рёбра являются рёбрами G.

def **Остовный лес** – для произвольного несвязного графа $G(V,E)$ для каждой компоненты связности можно построить остовное дерево T_i. $T_1 \cup \ldots \cup T_k$ – остовный лес.

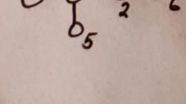
def **Код Прюфера** – способ взаимно однозначного кодирования деревьев с n вершинами (помеченных) с помощью последовательности из $n-2$ чисел.

Алг. построения кода Прюфера:

Дано дерево $T(V,E)$

step: Срезаем лист с минимальным номером, в код Прюфера добавляем вершину, смежную с этим листом.

Пример построения $Pruf(T)$:



$\Rightarrow Pruf(T) = \{3, 2, 3, 2\}$

Алг. восстановления дерева по коду Прюфера:

Дано: $Pruf(T)$ – код Прюфера, A – список всех вершин T

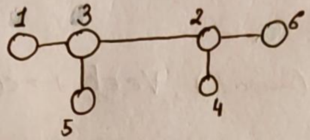
step: Берем первую невычеркнутую вершину из $Pruf(T)$ и минимальную вершину (невычеркнутую) из списка A, которой в коде Прюфера на данном шаге нет.

Когда $Pruf(T)$ опустеет, соед. оставшиеся 2 вершины из A

Пример построение дерева по его коду Прюфера:

$Pruf(T) = \{3, 2, 3, 2\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\Longrightarrow$



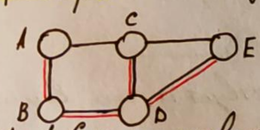
45. Главный цикл – определение. Разложите данный замкнутый путь в данном графе в сумму главных циклов.

$G(V, E)$ – неориентированный граф, $T(V, \tilde{E})$ – остовное дерево графа G

def **Хорда** (соответствующая T) – ребро графа G, не являющееся ветвью остовного дерева T: $\hat{e} \in E \setminus \tilde{E}$

def **Главный цикл** – цикл, получающийся при добавлении в остовное дерево T какой-либо хорды $\hat{e}$

Примеры главных циклов:



граф G_1 и его остовное дерево T_1

$\Rightarrow$ гл. циклы:

$C_1 = (ABCDA)$

$C_2 = (CDEC)$

Теорема. $G(V, E)$, $T(V, \tilde{E})$. $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – набор главных циклов, порожденных T.

Любой замкнутый простой путь в G можно представить в виде суммы главных циклов. $(z = C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_s})$

Алгоритм разложения:

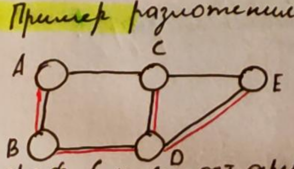
Если z – уже главный цикл, то разложение уже построено.

Пусть z – не главный цикл.

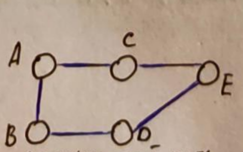
Рассматриваем хорду e_i, входящую в z и главный цикл, содержащий e_i. Когда все такие хорды рассмотрены, получится равенство

$$z \oplus C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_s} = 0 \Longrightarrow z = C_{i_1} \oplus \ldots \oplus C_{i_s}$$

Пример разложения:



граф G и его ост. дерево T



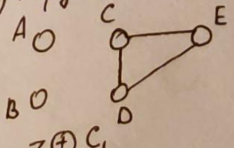
замкнутый путь

главные циклы:

$C_1 = (ABCDA)$

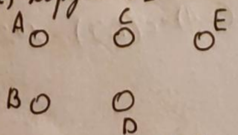
$C_2 = (CDEC)$

1) хорда AC



$z \oplus C_1$

2) хорда CE



$z \oplus C_1 \oplus C_2$

$\Longrightarrow z = C_1 \oplus C_2$

46. Задача о максимальном потоке в сети — постановка задачи. Постройте максимальный поток в данной сети при помощи данного алгоритма.

def **Сеть:**

$G(V,E)$ — ориентированный граф, $S, F \in V$:

S — исток, $\delta^+(S)=0$,

F — сток, $\delta^-(F)=0$.

Все ребра — направленные

Граф G — взвешенный; $c: E \to \mathbb{Z}$ (либо $\mathbb{R}$), $\forall e \in E \mapsto c(e) \geq 0$

def **Поток** в сети G: $f: E \to \mathbb{Z}$ (либо $\mathbb{R}$), такая что:

1) $\forall e \in E \quad 0 \leq f(e) \leq c(e)$

2) $\forall u \in V \setminus \{S,F\} \quad \sum\limits_{\substack{e_1 \in E \\ \xrightarrow[e_1]{} \bullet u}} f(e_1) - \sum\limits_{\substack{e_2 \in E \\ \underset{u}{\bullet}\xrightarrow[e_2]{}}} f(e_2) = 0$

Задача о максимальном потоке состоит в определении максимального количества, которое можно провезти через сеть из S в F.

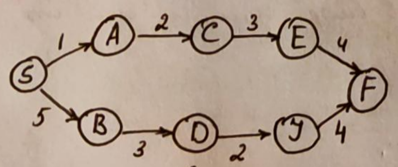
def **Разрез** в сети $G(V,E)$: $\tilde{E} \subseteq E$, такой, что

$G(V, E \setminus \tilde{E})$ — перестает быть связным

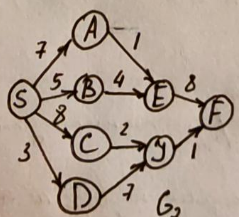
$\tilde{E}$ — минимальный по включению набор ребер

Теорема Форда-Фалкерсона. Максимальный поток в сети существует и его величина совпадает с суммой весов ребер $\sum\limits_{e \in \tilde{E}} c(e)$, где $\tilde{E}$ — минимальный разрез, отделяющий S и F

Примеры сетей:



G_1

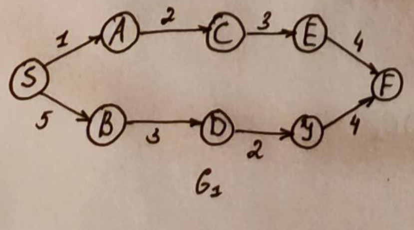


G_2

P.S. Алгоритм описывать не стану, где посмотреть знаете

47. Как связаны задача о максимальном потоке и минимальный разрез. Проиллюстрируйте примером.

см. п. 46.



G_1

min разрез: SA, DJ

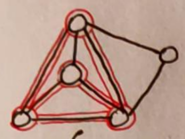
MAX поток: $c(SA)+c(DJ) = 1+2=3$

48. Клика – определение. Приведите пример графа с данной максимальной кликой.

def| **Клика** – полный подграф $\tilde{G}$ графа G.

$\tilde{G} \subseteq G$ - клика $\Longleftrightarrow$ $\tilde{G}$ - полный подграф в G

Примеры графов, содержащих клику:



G_1, max клика $\tilde{G}_1$ (K_4)

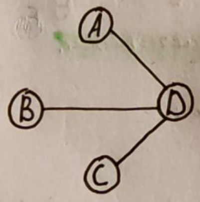
G_2, max клика $\tilde{G}_2$ (K_5)

49. Независимое множество – определение. Приведите пример графа с данным максимальным независимым множеством.

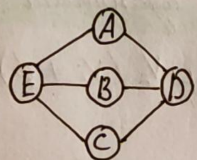
def| $W \in V$ графа $G(V,E)$ – **независимое множество** $\Longleftrightarrow \forall x,y \in W \ \nexists e = xy \in E$

Примеры:

$W = \{A, B, C\}$



$W = \{A, B, C\}$



50. Как связаны понятия клики и независимого множества? Приведите пример графа с данными максимальной кликой и независимым множеством или докажите, что это невозможно.

Определения клики и независимого множества см. в п. 48 и п. 49

def| $G(V,E)$, $|V| = n$

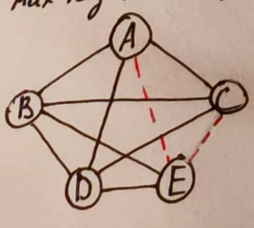
Граф-дополнение к G: $\bar{G}(V, \tilde{E})$, где $K_n = (V, \hat{E})$ и $\tilde{E} \sqcup E = \hat{E}$

[т.е. граф-дополнение содержит ребра, которых не хватает в G для получения K_n.
Имея максимальное независимое множество и множество всех вершин в графе, можно построить граф-дополнение. Можно построить полный граф, содержащий вершины клики и независимого мн-ва, после чего выкинуть ребра, которые входят в граф-дополнение]

Примеры:

Клика: $\{A, B, C, D\}$

max нез. мн-во: $\{A, E\}$, $\{E, C\}$



51. Плоский граф — определение. Приведите примеры: плоского графа, планарного, но не плоского графа, непланарного графа, обоснуйте.

def | $G(V,E)$ - плоский $\Longleftrightarrow$ на плоскости нет самопересечений

def | $G_1(V_1,E_1)$ и $G_2(V_2,E_2)$ - изоморфны

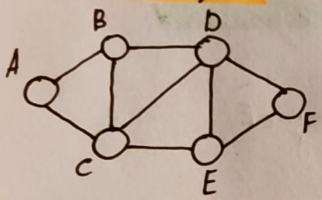
$\Updownarrow$

$\exists$ согласованные биекции $f_V : V_1 \to V_2$, $f_E : E_1 \to E_2$

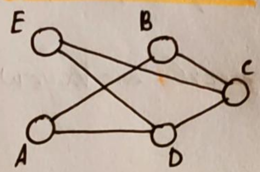
def | Граф - планарный, если он „изоморфен" плоскому

Примеры:

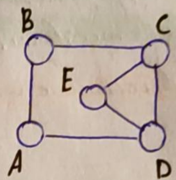
а) Плоский граф:



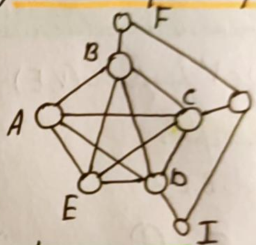
б) планарный граф (не плоский)



$\Rightarrow$



в) непланарный граф



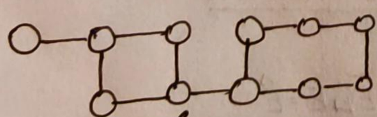
52. Двудольный граф — определение. Критерий двудольности. Приведите пример двудольного графа с заданными характеристиками.

def | Граф $G(V,E)$ - двудольный $\Longleftrightarrow V = V_1 \sqcup V_2$ ($V_i \neq \emptyset$), такие что:

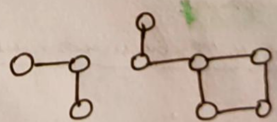
$\forall e \in E$: $e = v_1 v_2$, где $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

Теорема (критерий двудольности). Граф $G(V,E)$ - двудольный $\Longleftrightarrow$ граф не содержит циклов нечетной длины.

Примеры двудольных графов:



G_1



G_2